Großübung Balkenbiegung – Biegelinie

Es gelten die in der Vorlesung getroffenen Annahmen:

- Der Balken ist unbelastet gerade.
- Das Material sei über den Querschnitt homogen und linear elastisch.
- Die Belastung erfolgt durch Biegemomente und Querkräfte.
- Es gelte die Bernoulli-Hypothese.
- Die Deformationen sind klein.

Die Biegelinie (elastische Linie) erlaubt die Bestimmung der Verformung des Balkentragwerkes. Ebenso können mit Hilfe der Biegelinie auch statisch unbestimmt gelagerte Balkentragwerke berechnet werden. Dies war bisher ausschließlich mit den Gleichgewichtsbedingungen der Statik nicht möglich.

Benötigt werden zur Berechnung die Schnittgrößen, Materialkennwerte (hier der Elastizitätsmodul E) sowie Flächenkennwerte.

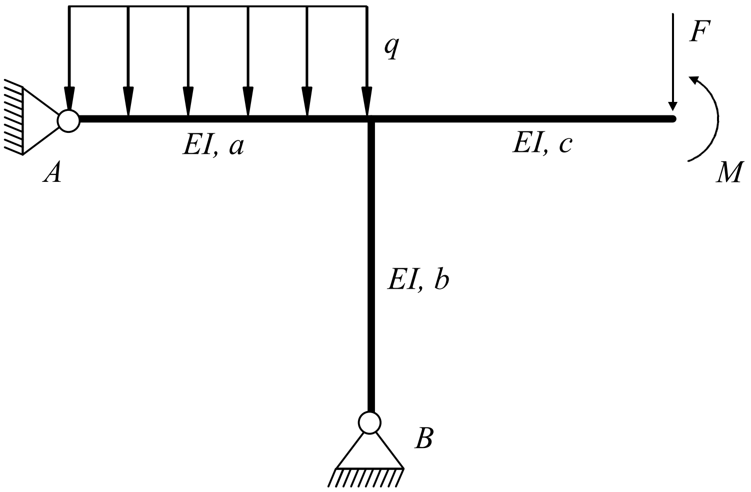
Als Beispiele werden vorgestellt:

- Verzweigtes ebenes Balkentragwerk, 1-fach statisch unbestimmt

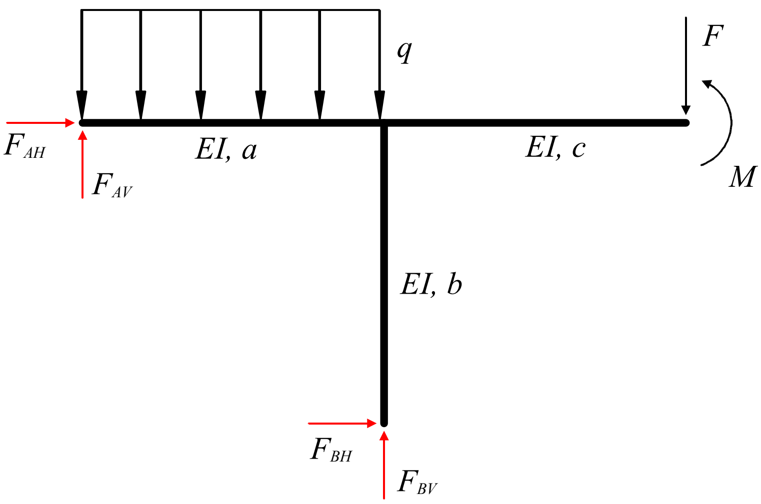
- Kragträger mit Einzellast, Z-Profil, 3-dimensional

Biegelinie 2D

Verzweigtes ebenes Balkentragwerk, 1-fach statisch unbestimmt



Schnittbild zur Bestimmung der Lagerreaktionen



statische Gleichgewichtsbedingungen

$$\uparrow \quad F_{AV} + F_{BV} - F - qa = 0$$

$$\rightarrow F_{AH} + F_{BH} = 0$$

$$A : F_{BV}\, a + F_{BH}\, b + M - F\,(a+c) - qa\frac{a}{2} = 0$$

Das Gleichungssystem ist derzeit nicht lösbar (4 Unbekannte in 3 Gleichungen). Deshalb wird eine Unbekannte zwischenzeitlich wie eine gegebene Kraft behandelt, z.B. F_{BH}.
Alle anderen Unbekannten werden in Abhängigkeit hiervon dargestellt.

$$F_{BV} = \frac{1}{a}\left(-F_{BH}\, b - M + F\,(a+c) + \frac{1}{2} q a^2 \right)$$

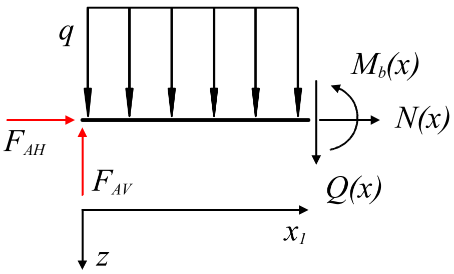
$$F_{AV} = qa + F - F_{BV} = \frac{1}{2} qa + F + F_{BH}\,\frac{b}{a} + \frac{M}{a} - F\,\frac{(a+c)}{a}$$

$$F_{AH} = -F_{BH}$$

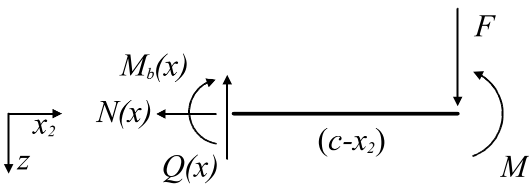
Mit Hilfe der Gleichungen für die Biegelinie kann die Kraft F_{BH} bestimmt werden, außerdem die Verformung des Tragwerkes.

Schnittgrößen für 3 Abschnitte

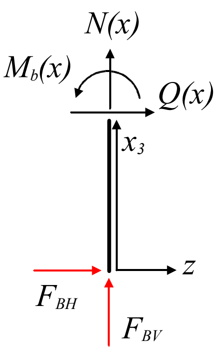
Es werden 3 Koordinatensysteme mit gleicher Orientierung eingeführt. Die Koordinatensysteme liegen im Flächenmittelpunkt, d.h. x ist die Verbindungslinie aller Flächenmittelpunkte entlang der Balkenlängsachse. Für die Berechnung der Biegelinie muss nur die Schnittgröße Biegemoment bestimmt werden.



$$\boxed{M_b(x_1) = F_{AV}\, x_1 - \frac{1}{2} q x_1^2}$$



$$\boxed{M_b(x_2) = -F\,(c - x_2) + M}$$



$$\boxed{M_b(x_3) = -F_{BH}\, x_3}$$

Biegelinien

$$w''(x) = \frac{-M_b(x)}{EI}$$

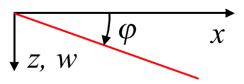
Annahme: Biegesteifigkeit EI sei konstant und in allen Abschnitten gleich groß. Die Koordinatenachsen seien auch Hauptträgheitsachsen. (gerade Biegung)

$$EI\,w_1'' = -M_{b1} = \frac{1}{2}qx_1^2 - F_{AV}x_1$$

$$EI\,w_1' = \frac{1}{6}qx_1^3 - \frac{1}{2}F_{AV}x_1^2 + C_1$$

$$EI\,w_1 = \frac{1}{24}qx_1^4 - \frac{1}{6}F_{AV}x_1^3 + C_1x_1 + C_2$$

w = Verschiebung in z-Richtung
w' = Biegewinkel φ



$$EI\,w_2'' = -M_{b2} = F(c - x_2) - M$$

$$EI\,w_2' = Fcx_2 - \frac{1}{2}Fx_2^2 - Mx_2 + C_3$$

$$EI\,w_2 = \frac{1}{2}Fcx_2^2 - \frac{1}{6}Fx_2^3 - \frac{1}{2}Mx_2^2 + C_3x_2 + C_4$$

$$EI\,w_3'' = -M_{b3} = F_{BH}x_3$$

$$EI\,w_3' = \frac{1}{2}F_{BH}x_3^2 + C_5$$

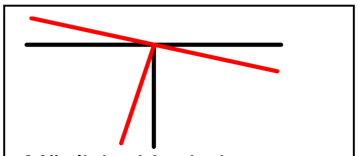
$$EI\,w_3 = \frac{1}{6}F_{BH}x_3^3 + C_5x_3 + C_6$$

Es gibt jetzt 6 Konstanten C_i und F_{BH} als Unbekannte. Zu deren Bestimmung brauchen wir (geometrische) Bedingungen für w und φ an bestimmten Stellen des Tragwerkes. Das sind die Rand- und Übergangsbedingungen.

Rand- und Übergangsbedingungen (RÜB)

Annahme: Längenänderungen der Balken werden nicht berücksichtigt. Die Verzweigung sei biegesteif (biegesteife Ecke).

1. $w_1(x_1 = 0) = 0$
2. $w_1(x_1 = a) = 0$
3. $w_2(x_2 = 0) = 0$
4. $w_3(x_3 = 0) = 0$ Bedingung zur Bestimmung von F_{BH}
5. $w_3(x_3 = b) = 0$
6. $w_1'(x_1 = a) = w_2'(x_2 = 0)$
7. $w_2'(x_2 = 0) = w_3'(x_3 = b)$



Damit entsteht ein Gleichungssystem mit 7 Unbekannten.

Anmerkung: Wird Bedingung (4) nicht gestellt, ist Lager B ein Loslager und wirkt nur vertikal. Fordert man an dieser Stelle eine bestimmte Verschiebung ($w = 0$ oder $w = w_0$), so kann man die Kraft bestimmen, die zum Erreichen dieser Verschiebung erforderlich ist.

die Auswertung der RÜB liefert:

aus 1. $C_2 = 0$

aus 2. $C_1 = \frac{1}{6} F_{AV}\, a^2 - \frac{1}{24} q a^3$

aus 3. $C_4 = 0$

aus 4. $C_6 = 0$

aus 5. $C_5 = -\frac{1}{6} F_{BH}\, b^2$

aus 6. $\frac{1}{6} q a^3 - \frac{1}{2} F_{AV}\, a^2 + C_1 = C_3$

aus 7. $C_3 = \frac{1}{2} F_{BH}\, b^2 + C_5$

3 Konstanten sind Null, 4 Gleichungen müssen noch verarbeitet werden. Zuvor muss F_{AV} noch durch F_{BH} und die gegebenen Belastungen ersetzt werden.

aus (7) mit (5): $C_3 = \frac{1}{3} F_{BH}\, b^2$

aus (6) mit (2):

$$\begin{aligned}
C_3 &= \frac{1}{6} q a^3 - \frac{1}{2} F_{AV}\, a^2 + C_1 \\
&= \frac{1}{6} q a^3 - \frac{1}{2} F_{AV}\, a^2 + \frac{1}{6} F_{AV}\, a^2 - \frac{1}{24} q a^3 \\
&= \frac{1}{8} q a^3 - \frac{1}{3} F_{AV}\, a^2 \\
&= \frac{1}{8} q a^3 - \frac{1}{3} a^2 \left(\frac{1}{2} q a + F + F_{BH} \frac{b}{a} + \frac{M}{a} - F \frac{(a+c)}{a} \right)
\end{aligned}$$

$$C_3 = -\frac{1}{24} q a^3 - \frac{1}{3} F_{BH}\, ab - \frac{1}{3} Ma + \frac{1}{3} Fac$$

Aus den letzten beiden Gleichungen erhält man:

$$F_{BH} = \frac{-\frac{1}{8} q a^3 - Ma + Fac}{b^2 + ab}$$

Hieraus folgen nun alle anderen Konstanten und die übrigen Lagerreaktionen: $C_1 ... C_6, F_{AH}, F_{AV}, F_{BV}$ Das ist recht aufwändig, man kann auch zu anderen Hilfsmitteln greifen.

Symbolisches Lösen des Gleichungssystems, zum Beispiel mit Programmen wie Maple, Mathematica oder (hier) Mathcad.

Der Lösungsvektor enthält die gesuchten Größen in der angegebenen Reihenfolge.

Vorgabe

$$\frac{1}{6}\cdot F_{AV}\cdot a^2 - \frac{1}{24}\cdot q\cdot a^3 = C_1$$

$$\frac{-1}{6}\cdot F_{BH}\cdot b^2 = C_5$$

$$\frac{1}{3}\cdot F_{BH}\cdot b^2 = C_3$$

$$\frac{1}{6}\cdot q\cdot a^3 - \left(\frac{1}{2}\cdot F_{AV}\cdot a^2\right) + C_1 = C_3$$

$$\frac{1}{2}\cdot q\cdot a + F + F_{BH}\cdot\frac{b}{a} + \frac{M}{a} - F\cdot\frac{a+c}{a} = F_{AV}$$

$$F_{AH} = -F_{BH}$$

$$\frac{1}{a}\cdot\left[-F_{BH}\cdot b - M + F\cdot(a+c) + \frac{1}{2}\cdot q\cdot a^2\right] = F_{BV}$$

$$\text{Suchen}\left(C_1, C_3, C_5, F_{BH}, F_{BV}, F_{AH}, F_{AV}\right) \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{48}\cdot a\cdot\frac{q\cdot a^3 + 2\cdot q\cdot a^2\cdot b + 8\cdot b\cdot M - 8\cdot b\cdot F\cdot c}{a+b} \\ \frac{-1}{24}\cdot a\cdot\left(q\cdot a^2 + 8\cdot M - 8\cdot F\cdot c\right)\cdot\frac{b}{a+b} \\ \frac{1}{48}\cdot a\cdot\left(q\cdot a^2 + 8\cdot M - 8\cdot F\cdot c\right)\cdot\frac{b}{a+b} \\ \frac{-1}{8}\cdot a\cdot\frac{q\cdot a^2 + 8\cdot M - 8\cdot F\cdot c}{b\cdot(a+b)} \\ \frac{-1}{8}\cdot\frac{-5\cdot q\cdot a^3 + 8\cdot b\cdot M - 8\cdot F\cdot a^2 - 8\cdot F\cdot a\cdot b - 8\cdot b\cdot F\cdot c - 4\cdot q\cdot a^2\cdot b}{(a+b)\cdot a} \\ \frac{1}{8}\cdot a\cdot\frac{q\cdot a^2 + 8\cdot M - 8\cdot F\cdot c}{b\cdot(a+b)} \\ \frac{1}{8\cdot a}\cdot\frac{3\cdot q\cdot a^3 + 4\cdot q\cdot a^2\cdot b + 8\cdot b\cdot M - 8\cdot b\cdot F\cdot c}{a+b} \end{bmatrix}$$

Nun lassen sich auch die Verformungen in den 3 Abschnitten berechnen.

Wir haben bis hier eine sehr allgemein gehaltene Lösung. Für die Verformungsberechnung wollen wir nun einige Konkretisierungen treffen um die Rechnung übersichtlicher zu gestalten.

Annahme:

$$F = qa$$
$$M = qa^2$$
$$a = b = c$$

Dann ergibt sich:

$$C_1 = \frac{3}{96}qa^3 = \frac{1}{32}qa^3 \qquad C_2 = 0$$
$$C_3 = \frac{-1}{48}qa^3 \qquad C_4 = 0$$
$$C_5 = \frac{1}{96}qa^3 \qquad C_6 = 0$$

$$F_{AH} = \frac{1}{16}qa \qquad F_{BH} = \frac{-1}{16}qa$$
$$F_{AV} = \frac{7}{16}qa \qquad F_{BV} = \frac{25}{16}qa$$

Biegelinien (Verschiebungsfunktionen)

Alle Zwischenergebnisse werden in die Verschiebungsfunktionen eingesetzt.

$$w_1(x_1) = \frac{1}{EI}\left(\frac{1}{24}qx_1^4 - \frac{7}{96}qax_1^3 + \frac{1}{32}qa^3x_1\right) = \frac{qa^4}{EI}\left(\frac{1}{24}\frac{x_1^4}{a^4} - \frac{7}{96}\frac{x_1^3}{a^3} + \frac{1}{32}\frac{x_1}{a}\right)$$
$$w_2(x_2) = \frac{1}{EI}\left(-\frac{1}{6}qax_2^3 - \frac{1}{48}qa^3x_2\right) = \frac{qa^4}{EI}\left(-\frac{1}{6}\frac{x_2^3}{a^3} - \frac{1}{48}\frac{x_2}{a}\right)$$
$$w_3(x_3) = \frac{1}{EI}\left(-\frac{1}{96}qax_3^3 + \frac{1}{96}qa^3x_3\right) = \frac{qa^4}{EI}\left(-\frac{1}{96}\frac{x_3^3}{a^3} + \frac{1}{96}\frac{x_3}{a}\right)$$

Verschiebung am Angriffspunkt der Kraft F

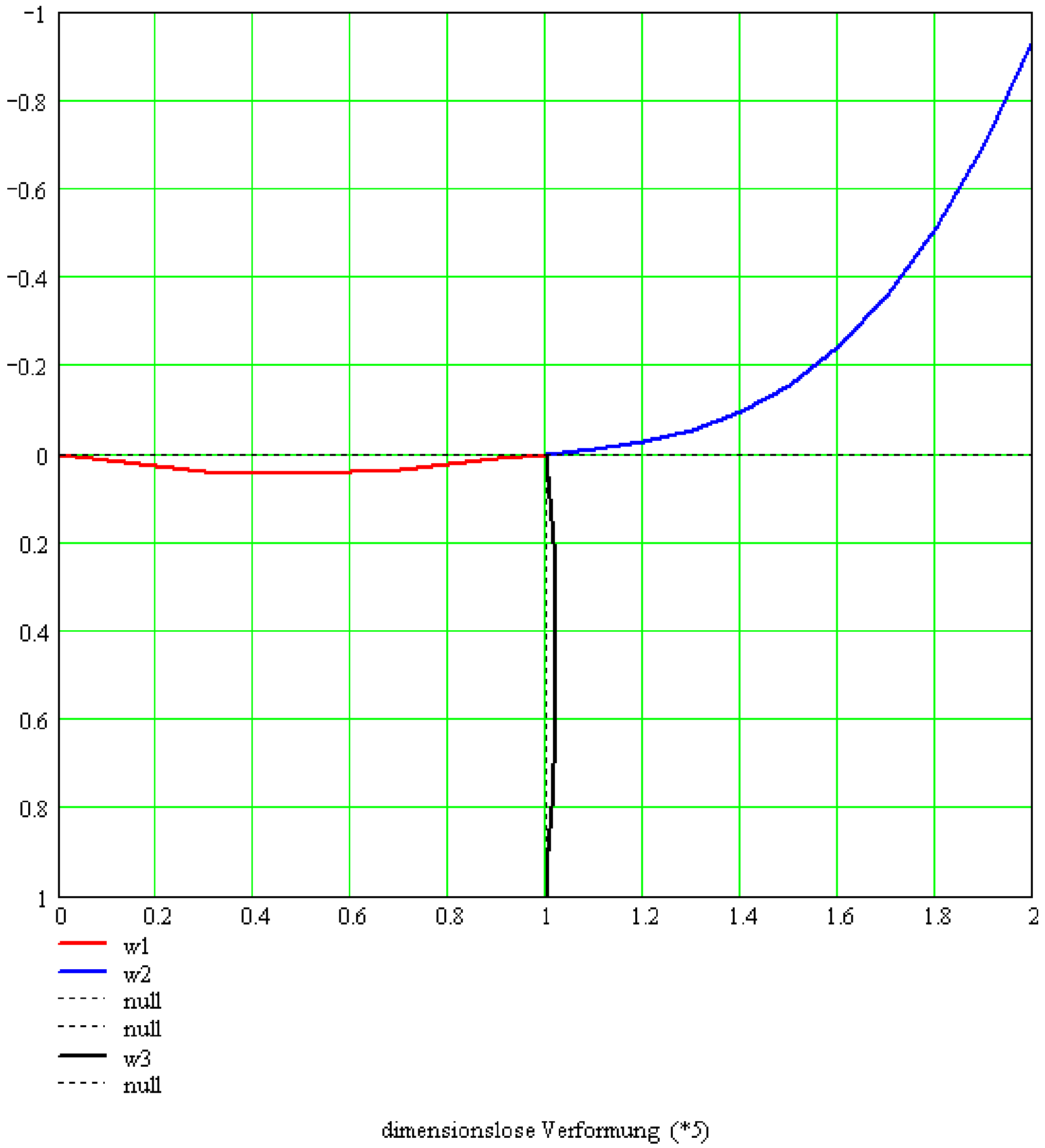
$$w_2(x_2 = c) = w_2(x_2 = a) = -\frac{qa^4}{EI}\frac{9}{48}$$

Balkenneigung am Angriffspunkt der Kraft F

$$w_2'(x_2) = \frac{qa^3}{EI}\left(-\frac{1}{2}\frac{x_2{}^2}{a^2} - \frac{1}{48}\right)$$

$$w_2'(x_2 = c) = w_2'(x_2 = a) = -\frac{qa^3}{EI}\frac{25}{48}$$

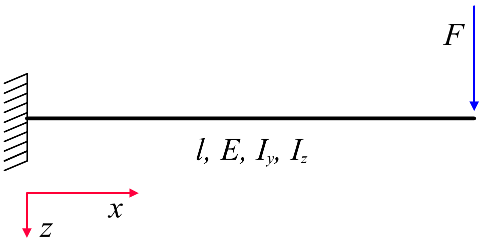
grafische Darstellung der dimensionslosen Verformung $\frac{w}{\left(\frac{qa^4}{EI}\right)}$



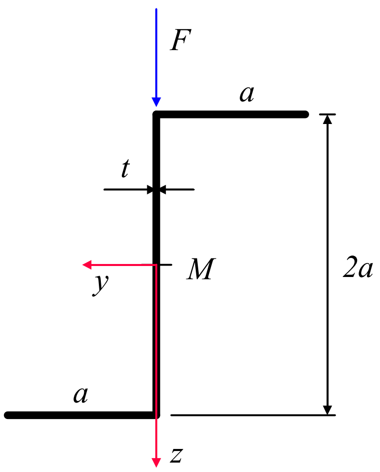
In gleicher Weise können die Biegewinkel bestimmt und dargestellt werden.

Biegelinie 3D, schiefe Biegung

Aufgabe 2.52 aus der Aufgabensammlung Elastostatik



Der Kragträger ist durch eine Kraft F in z-Richtung belastet.



Der Querschnitt hat die gezeigte Form, die Profilwandstärke ist konstant t. Die Richtungen y und z sind keine Hauptachsenrichtungen. Es handelt sich also um schiefe Biegung.

Die Berechnung ist in 2 Varianten möglich:

- im System der Hauptträgheitsachsen: Die Hauptträgheitsmomente und sind zu bestimmen und die Belastung muss in die entsprechenden Richtungen zerlegt werden.

- im gegebenen System x-y-z: Die Trägheitsmomente I_y, I_z, I_{yz} sind zu bestimmen.

Formeln für ein Koordinatensystem x-y-z im Flächenmittelpunkt

$$\sigma_x(x,y,z) = \frac{\left(-M_{bz}I_y + M_{by}I_{yz}\right)y + \left(M_{by}I_z - M_{bz}I_{yz}\right)z}{I_yI_z - I_{yz}^2}$$

$$Ev''(x) = \frac{M_{bz}I_y - M_{by}I_{yz}}{I_yI_z - I_{yz}^2}$$

$$Ew''(x) = \frac{M_{bz}I_{yz} - M_{by}I_z}{I_yI_z - I_{yz}^2}$$

$$u_{gesamt}(x) = \sqrt{[v(x)]^2 + [w(x)]^2}$$

Formeln für ein Hauptachsensystem x-y-z, im Flächenmittelpunkt $I_{yz} = 0$
die Formeln vereinfachen sich

$$\sigma_x(x,y,z) = +\frac{M_{by}}{I_y} z - \frac{M_{bz}}{I_z} y$$

$$v''(x) = \frac{M_{bz}}{EI_z}$$

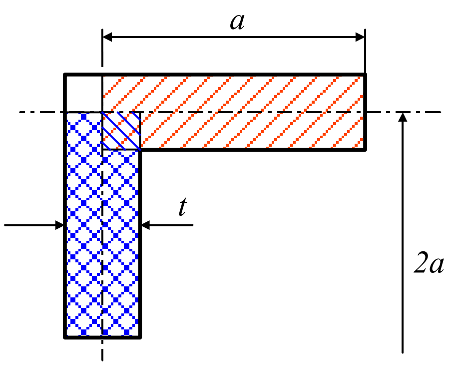
$$w''(x) = \frac{-M_{by}}{EI_y}$$

$$u_{gesamt}(x) = \sqrt{[v(x)]^2 + [w(x)]^2}$$

Die Rechnung soll im gegebenen Koordinatensystem vorgenommen werden.

Bestimmung der Trägheitsmomente bezogen auf M

Annahme: Die Wandstärke t sei erheblich kleiner als die Abmessung a.



Hinweis:
dünnwandiges Profil
$t << a \quad \Rightarrow \quad t^3 a << t a^3$

Die Bemaßung erfolgt entlang der Profilmittellinien.
Die Berechnung der FTM ist eine gute Näherung, deren Güte vom Verhältnis t/a abhängt.
→ doppelt bzw. nicht erfasste Eckbereiche

$$t << a$$

$$I_y = \sum \left(I_{yi} + z_i^2 A_i \right)$$

$$I_y = 2\frac{a t^3}{12} + \frac{t(2a)^3}{12} + 2a^2 a t \approx \frac{32}{12} a^3 t = \frac{8}{3} a^3 t$$

$$I_z = \sum \left(I_{zi} + y_i^2 A_i \right)$$

$$I_z = 2\frac{t a^3}{12} + 2\frac{a t^3}{12} + 2\left(\frac{a}{2}\right)^2 a t \approx \frac{2}{3} a^3 t$$

$$I_{yz} = \sum \left(I_{yzi} - y_i z_i A_i \right)$$

$$I_{yz} = -\frac{a}{2} a\, a t - \left(-\frac{a}{2}\right)(-a) a t = -a^3 t$$

Hauptträgheitsmomente und Hauptachsenlage

$$I_{I,II} = \frac{I_y + I_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_y - I_z}{2}\right)^2 + I_{yz}{}^2}$$

$$= \frac{10}{6} a^3 t \pm \sqrt{\left(\frac{6}{6}\right)^2 + 1^2} \quad a^3 t$$

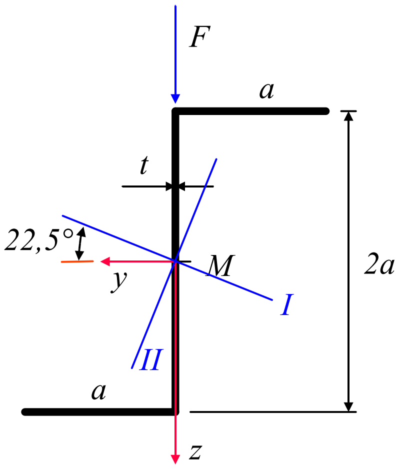
$$= a^3 t (1{,}667 \pm 1{,}414)$$

$$I_I = 3{,}081 \quad a^3 t$$

$$I_{II} = 0{,}253 \quad a^3 t$$

$$\varphi_I = \arctan\left(\frac{I_I - I_y}{I_{yz}}\right) = \arctan\left(\frac{3{,}081 - 2{,}667}{-1}\right) = \arctan(-0{,}414)$$

$$\varphi_I = -22{,}49°$$

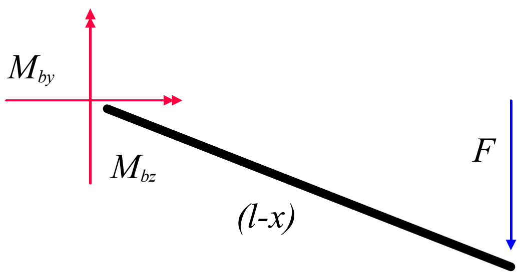


Biegemomente

nach Freischneiden ergeben sich für das negative Schnittufer:

$$M_{by}(x) = -F(l - x)$$

$$M_{bz}(x) = 0$$



Biegelinien

$$Ev''(x)=\frac{F(l-x)\left(-a^3t\right)}{\frac{8}{3}a^3t\,\frac{2}{3}a^3t-\left(a^3t\right)^2}=\frac{-F(l-x)}{\frac{7}{9}a^3t}$$

$$v''(x)=\frac{-9F(l-x)}{7Ea^3t}$$

$$v'(x)=\frac{-9F(lx-\frac{x^2}{2})}{7Ea^3t}+C_1$$

$$v(x)=\frac{-9F(l\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6})}{7Ea^3t}+C_1x+C_2$$

RÜB:

$$v(0)=0 \quad\Rightarrow\quad C_2=0$$
$$v'(0)=0 \quad\Rightarrow\quad C_1=0$$

$$Ew''(x)=\frac{F(l-x)\left(\frac{2}{3}a^3t\right)}{\frac{8}{3}a^3t\,\frac{2}{3}a^3t-\left(a^3t\right)^2}=\frac{F(l-x)}{\frac{7}{9}\left(a^3t\right)^2}\left(\frac{2}{3}a^3t\right)$$

$$w''(x)=\frac{6F(l-x)}{7Ea^3t}$$

$$w'(x)=\frac{6F(lx-\frac{x^2}{2})}{7Ea^3t}+C_3$$

$$w(x)=\frac{6F(l\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6})}{7Ea^3t}+C_3x+C_4$$

RÜB:

$$w(0)=0 \quad\Rightarrow\quad C_4=0$$
$$w'(0)=0 \quad\Rightarrow\quad C_3=0$$

Die maximalen Verschiebungen findet man an der Lastangriffsstelle.
(positive Verschiebung in positiver Achsenrichtung)

$$v_{\max}=v(x=l)=\frac{-3}{7}\frac{Fl^3}{Ea^3t}$$

$$w_{\max}=w(x=l)=\frac{2}{7}\frac{Fl^3}{Ea^3t}$$

$$\left|u_{gesamt}\right|=\frac{\sqrt{13}}{7}\frac{Fl^3}{Ea^3t}$$

Skizze der Balkenverformung