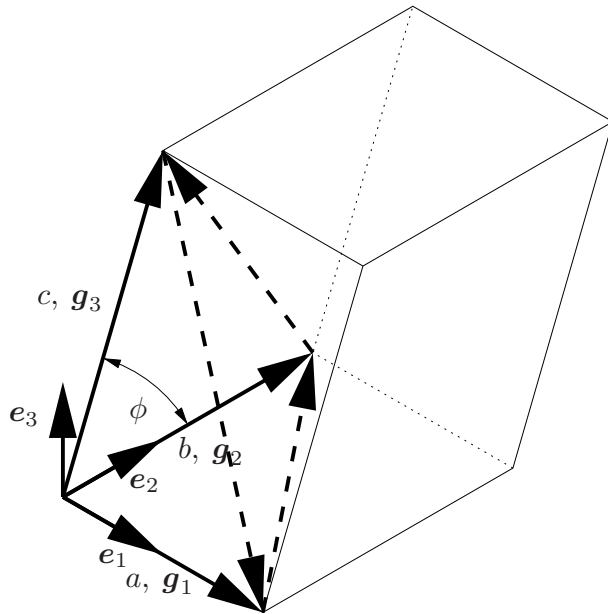


1 Dualbasen



Für die dargestellte monokline Elementarzelle eines Kristallgitters mit den Atomabständen a, b und c sollen die Kantenvektoren des gestrichelt eingezeichneten Dreiecks und der Normalenvektor des Dreiecks angegeben werden bezüglich der Gitterbasis \mathbf{g}_i , deren Dualbasis \mathbf{g}^i und der Orthonormalbasis \mathbf{e}_i . Zeichnen Sie \mathbf{g}^i in die obige Skizze ein.

Lösung: Die Dreieck-Kantenvektoren sind offensichtlich durch

$$\mathbf{d}_1 = \mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_3 \tag{1}$$

$$\mathbf{d}_2 = \mathbf{g}_2 - \mathbf{g}_1 \tag{2}$$

$$\mathbf{d}_3 = \mathbf{g}_3 - \mathbf{g}_2 \tag{3}$$

gegeben, die Komponenten bezüglich \mathbf{g}_i sind also jeweils $[1,0,-1]$, $[-1,1,0]$ und $[0,-1,1]$. Der auf diesen Vektoren senkrecht stehende Normalenvektor wird am besten bezüglich der Basis \mathbf{g}^i angegeben, für die

$$\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}^j = \delta_i^j \tag{4}$$

gilt. Wir setzen $\mathbf{n} = n_1 \mathbf{g}^1 + n_2 \mathbf{g}^2 + n_3 \mathbf{g}^3$ an. Die Skalarmultiplikation mit \mathbf{d}_1 und \mathbf{d}_2 muss Null ergeben,

$$0 = n_1 - n_3 \tag{5}$$

$$0 = -n_1 + n_2 \tag{6}$$

womit $n_1 = n_2 = n_3$ klar ist. Die Länge von \mathbf{n} ist erstmal beliebig, wir nehmen also der Einfachheit halber $n_1 = n_2 = n_3 = 1$. Wir können Vektoren bezüglich der Dualbasen darstellen,

$$\mathbf{n} = n_i \mathbf{g}^i = n^j \mathbf{g}_j. \tag{7}$$

Die Skalarmultiplikation mit \mathbf{g}_k ergibt

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{g}_k = n_i \delta_k^i = n^j G_{jk} = n_k, \quad G_{jk} = \mathbf{g}_j \cdot \mathbf{g}_k. \tag{8}$$

Wir nennen G_{jk} die Metrik der Basis \mathbf{g}_j . Offensichtlich können wir mit der Metrik die Komponenten zwischen den Basen umrechnen. Die Metrik können wir aber erst angeben wenn wir \mathbf{g}_i bezüglich einer anderen Basis darstellen. Mit der ONB \mathbf{e}_i haben wir

$$\mathbf{g}_1 = a\mathbf{e}_1 \quad (9)$$

$$\mathbf{g}_2 = b\mathbf{e}_2 \quad (10)$$

$$\mathbf{g}_3 = c(\cos \phi \mathbf{e}_2 + \sin \phi \mathbf{e}_3), \quad (11)$$

woraus sich

$$G_{ij} = \begin{bmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & bc \cos \phi \\ 0 & bc \cos \phi & c^2 \end{bmatrix} \quad (12)$$

ergibt. Wir erhalten die Komponenten d_i (\mathbf{d} bezüglich \mathbf{g}^i) durch Multiplikation der Komponenten $[1,0,-1]$, $[-1,1,0]$ und $[0,-1,1]$ mit der Metrik,

$$\mathbf{d}_1 = a^2 \mathbf{g}^1 - bc \cos \phi \mathbf{g}^2 - c^2 \mathbf{g}^3 \quad (13)$$

$$\mathbf{d}_2 = -a^2 \mathbf{g}^1 + b^2 \mathbf{g}^2 + bc \cos \phi \mathbf{g}^3 \quad (14)$$

$$\mathbf{d}_3 = (-b^2 + bc \cos \phi) \mathbf{g}^2 - (bc \cos \phi + c^2) \mathbf{g}^3. \quad (15)$$

Man kann leicht feststellen, dass die Metrik der Basis \mathbf{g}^i die inverse Matrix von G_{ij} sein muss:

$$n_i = G_{ij} n^j = G_{ij} G^{jk} n_k \quad (16)$$

muss für alle Vektoren \mathbf{n} gelten. Daher muss $G_{ij} G^{jk} = \delta_i^k$ sein. Die Inversion der Matrix liefert

$$G^{ij} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{(b \sin \phi)^2} & -\frac{1}{bc \sin \phi \tan \phi} \\ 0 & -\frac{1}{bc \sin \phi \tan \phi} & \frac{1}{(c \sin \phi)^2} \end{bmatrix}, \quad (17)$$

woraus wir durch Multiplikation mit $[1,1,1]$ sofort die Komponenten von \mathbf{n} bezüglich der Basis \mathbf{g}_i ausrechnen können,

$$n^i = \left[\frac{1}{a^2}, \frac{(c - b \cos \phi)}{b^2 c \sin^2 \phi}, \frac{(b - c \cos \phi)}{bc^2 \sin^2 \phi} \right]. \quad (18)$$

Es gibt verschiedene Möglichkeiten, die Komponenten von \mathbf{g}^i bezüglich \mathbf{g}_i und \mathbf{e}_i auszurechnen. Für die Darstellung bezüglich \mathbf{g}_i muss G^{ij} lediglich mit den trivialen Komponenten $[1,0,0]$, $[0,1,0]$ und $[0,0,1]$ der Basisvektoren \mathbf{g}^i multipliziert werden,

$$\mathbf{g}^1 = \frac{1}{a^2} \mathbf{g}_1 \quad (19)$$

$$\mathbf{g}^2 = \frac{1}{(b \sin \phi)^2} \mathbf{g}_2 - \frac{1}{bc \sin \phi \tan \phi} \mathbf{g}_3 \quad (20)$$

$$\mathbf{g}^3 = -\frac{1}{bc \sin \phi \tan \phi} \mathbf{g}_2 + \frac{1}{(c \sin \phi)^2} \mathbf{g}_3, \quad (21)$$

die Darstellung bezüglich \mathbf{e}_i gewinnt man durch Ersetzen von \mathbf{g}_i durch \mathbf{e}_i ,

$$\mathbf{g}^1 = \frac{1}{a} \mathbf{e}_1 \quad (22)$$

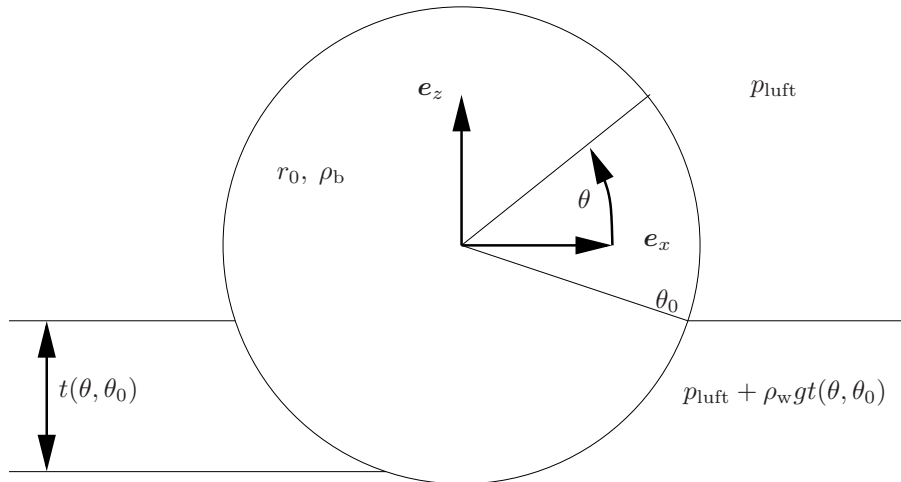
$$\mathbf{g}^2 = \frac{1}{b} \left(\mathbf{e}_2 - \frac{1}{\tan \phi} \mathbf{e}_3 \right) \quad (23)$$

$$\mathbf{g}^3 = \frac{1}{c \sin \phi} \mathbf{e}_3. \quad (24)$$

Hier wurden diverse für Winkelfunktionen gültige Sätze zur Vereinfachung der Ergebnisse verwendet. Damit kann man \mathbf{g}^i in die oben dargestellte Elementarzelle einzeichnen. Man kann auch die Probe $\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}^j = \delta_i^j$ in der kartesischen Basis machen. Die

2 Schwimmender Ball

Wir betrachten einen auf dem Wasser wippenden Ball. Gesucht ist die Eintauchtiefe in der statischen Ruhelage und die Bewegungsdifferentialgleichung. Schätzen Sie die Periodendauer eines Schwingvorgangs mit kleiner Auslenkung ab. Gegeben sind die Parameter in dieser Skizze:



Lösung: Das Kräftegleichgewicht ist gegeben durch:

$$\int \rho_b \mathbf{b} dV + \int \mathbf{t} dA = \int \rho \ddot{\mathbf{x}} dV. \quad (25)$$

Wir dürfen den Trägheitsterm streichen wenn wir nur die Gleichgewichtslage betrachten. Die Massenkraftdichte \mathbf{b} ist die Erdbeschleunigung in negativer z -Richtung, $\mathbf{b} = -g\mathbf{e}_z$. Der Spannungsvektor taucht durch das Freischneiden an der Balloberfläche auf. Wir haben nur hydrostatischen Druck, welcher

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} \quad (26)$$

entspricht. Die Oberflächennormale ist überall \mathbf{e}_r , so dass

$$\mathbf{t} = -p_{w,luft} \mathbf{e}_r \quad (27)$$

gilt. Wenden wir uns dem ersten Term zu:

$$\int \rho_b \mathbf{b} dV = -\rho_b g \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{r_0} r^2 \cos \theta dr d\phi d\theta \mathbf{e}_z = -\frac{4}{3} \pi r_0^3 g \rho_b \mathbf{e}_z. \quad (28)$$

Der $r^2 \cos \theta$ -Term ist die Determinante der Jacobimatrix des Koordinatenwechsels. Sie muss bei Volumenintegration dem Argument als Faktor hinzugefügt werden. Man erhält, wenig überraschend, die Gewichtskraft des Balls, aus Dicht \times Volumen \times Erdbeschleunigung. Wenden wir uns nun dem zweiten Term zu:

$$\int \mathbf{t} dA = - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\pi}^{\pi} p_{w,luft} r^2 \cos \theta \mathbf{e}_r d\phi d\theta. \quad (29)$$

Hier taucht wieder der Term $r^2 \cos \theta$ als Faktor auf: Dies kommt aus der Umrechnung der differentiell kleinen Winkel $d\theta$ und $d\phi$ in Linienelemente. Außerdem hängt die Länge des Linienelements $d\phi$ von θ ab: es verschwindet für $\theta = \pi/2$ oder $-\pi/2$. Letztlich taucht wieder die Determinante von der Jacobimatrix auf.

Wir können r zu r_0 machen und aus dem Integral rausziehen (Integration über die Kugeloberfläche). Außerdem müssen wir das Integral aufteilen. Wir sehen gleich das man in ein volles Oberflächenintegral mit p_{luft} und in ein Integral über den benetzten Teil der Oberfläche schreiben kann. Außerdem können wir gleich $\mathbf{e}_r = \cos \theta \cos \phi \mathbf{e}_x + \cos \theta \sin \phi \mathbf{e}_y + \sin \theta \mathbf{e}_z$ einsetzen:

$$\int t dA = -r_0^2 p_{\text{luft}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos \theta (\cos \theta \cos \phi \mathbf{e}_x + \cos \theta \sin \phi \mathbf{e}_y + \sin \theta \mathbf{e}_z) d\phi d\theta + \quad (30)$$

$$= -r_0^2 \int_{-\pi/2}^{\theta_0} \int_{-\pi}^{\pi} \rho_w g t(\theta, \theta_0) \cos \theta (\cos \theta \cos \phi \mathbf{e}_x + \cos \theta \sin \phi \mathbf{e}_y + \sin \theta \mathbf{e}_z) d\phi d\theta \quad (31)$$

Bei beiden Integralen verschwinden sofort alle \mathbf{e}_x und \mathbf{e}_y -Anteile, da wir jeweils über eine ganze Periode von $\sin \phi$ oder $\cos \phi$ integrieren. Weiterhin verschwindet das p_{luft} -Integral auch in z -Richtung, da der verbliebene Term $\sin \theta \cos \theta = \sin(2\theta)/2$ ist. Die Integration von $-\pi/2$ bis $\pi/2$ geht somit wieder über eine ganze Periode. Was übrig bleibt ist der Teil mit $t(\theta, \theta_0)$. Die Tiefe unter Wasser an einem Kugeloberflächenpunkt mit θ ist durch $t = r_0(\sin \theta_0 - \sin \theta)$ gegeben, was man sich leicht an einer Skizze veranschaulichen kann. Somit wird das verbliebene Integral zu

$$\int t dA = -r_0^3 \rho_w g \int_{-\pi/2}^{\theta_0} \int_{-\pi}^{\pi} \cos \theta \sin \theta (\sin \theta_0 - \sin \theta) \mathbf{e}_z d\phi d\theta \quad (32)$$

$$= -2\pi r_0^3 \rho_w g \left(-\frac{\cos^2 \theta_0 \sin \theta_0}{2} - \frac{1 + \sin^3 \theta_0}{3} \right) \mathbf{e}_z \quad (33)$$

$$= \pi r_0^3 \rho_w g \left(\cos^2 \theta_0 \sin \theta_0 + \frac{2 + 2 \sin^3 \theta_0}{3} \right) \mathbf{e}_z. \quad (34)$$

Hier kann man nun einige Plausibilitätstests machen: Für $\theta_0 = -\pi/2$ kommt $\mathbf{0}$ raus, für $\theta_0 = \pi/2$ kommt das Kugelvolumen mal $\rho_w g \mathbf{e}_z$ raus. Man kann nun mal die Eintauchtiefe für den Fall $\rho_b = \rho_w/2$ ermitteln. Hierfür bleibt aus Gleichung (25) nur die Untersuchung der z -Komponente:

$$\frac{4}{3} \pi r_0^3 g \rho_w \frac{1}{2} = \pi r_0^3 \rho_w g \left(\cos^2 \theta_0 \sin \theta_0 + \frac{2 + 2 \sin^3 \theta_0}{3} \right) \quad (35)$$

$$\frac{2}{3} = \left(\cos^2 \theta_0 \sin \theta_0 + \frac{2 + 2 \sin^3 \theta_0}{3} \right) \quad (36)$$

$$0 = \left(\cos^2 \theta_0 \sin \theta_0 + \frac{2 \sin^3 \theta_0}{3} \right) \quad (37)$$

Diese Gleichung lässt sich nicht explizit nach θ_0 auflösen, man sieht aber das $\theta_0 = 0$ eine Lösung ist. Dies entspricht dem zur Hälfte eingetauchten Ball.

Wenden wir uns nun dem Schwingvorgang zu. Das Integral $\int \rho \ddot{\mathbf{x}} dV$ vereinfacht sich, wenn wir annehmen das der Ball sich nicht deformiert, zu $m_b \ddot{\mathbf{x}}$. Wir schränken uns auf ein vertikales Schwingen des Balls ein, also ist $\ddot{\mathbf{x}} = \ddot{z} \mathbf{e}_z$. Die Gesamtimpulsbilanz ist nun

$$-m_b g \mathbf{e}_z + r_0^3 \pi \rho_w g \left(\cos^2 \theta_0 \sin \theta_0 + \frac{2 + 2 \sin^3 \theta_0}{3} \right) \mathbf{e}_z = m_b \ddot{z} \mathbf{e}_z. \quad (38)$$

Wir müssen nun die Koordinate z mit dem Benetzungswinkel θ_0 koppeln. Man erkennt das $r_0 \sin \theta_0 = z_b$ ist, z_b also den Wasserstand in positiver \mathbf{e}_z -Richtung bezüglich des Kugelmittelpunktes misst:

$$-m_b g \mathbf{e}_z + \pi \rho_w g \left(r_0^2 z_b - \frac{z_b^3}{3} + \frac{2}{3} r_0^3 \right) \mathbf{e}_z = m_b \ddot{z} \mathbf{e}_z. \quad (39)$$

Weiterhin können wir die statische Gewichtskraft durch eine Änderung des Nullpunktes, bezüglich dessen wir die Verschiebung des Balls messen, entfernen. Hierfür wird, wie oben schon durchgeführt, der Trägheitsterm

entfernt und z_{b0} ermittelt. Anschließend kann der Gewichtsterm durch den entsprechenden Ausdruck mit z_{b0} ersetzt werden:

$$-\pi\rho_w g(r_0^2 z_{b0} - \frac{z_{b0}^3}{3} + \frac{2}{3}r_0^3)e_z + \pi\rho_w g(r_0^2 z_b - \frac{z_b^3}{3} + \frac{2}{3}r_0^3)e_z = m_b \ddot{z}e_z \quad (40)$$

$$\pi\rho_w g(-r_0^2 z_{b0} + \frac{z_{b0}^3}{3} + r_0^2 z_b - \frac{z_b^3}{3})e_z = m_b \ddot{z}e_z \quad (41)$$

Nun können wir z_b durch $z_{b0} + \Delta z$ ersetzen:

$$\pi\rho_w g(r_0^2 \Delta z - z_{b0} \Delta z^2 - z_{b0}^2 \Delta z - \frac{\Delta z_{b0}^3}{3})e_z = m_b \ddot{z}e_z \quad (42)$$

Nun fehlt noch die Identifikation von \ddot{z} : wir haben mit z_b eine Größe eingeführt die den Richtungssinn der z -Koordinate umkehrt: Dies kann man sich leicht klarmachen: Wenn z_b anwächst bewegt sich der Ball nach unten, in Richtung Wasser, entgegen der von uns eingeführten z -Richtung. Der Wechsel des Koordinatenursprunges hat aber keinen Einfluss, da dieser konstant ist, und somit beim bilden der Zeitableitung von z herausfällt. Wir können also $\ddot{z} = -\Delta \ddot{z}$ ersetzen:

$$0 = m_b \Delta \ddot{z} + \pi\rho_w g(r_0^2 \Delta z - z_{b0} \Delta z^2 - z_{b0}^2 \Delta z - \frac{\Delta z_{b0}^3}{3}). \quad (43)$$

Beschränken wir uns auf kleine Auslenkungen dürfen Δz^2 und Δz^3 gegenüber Δz vernachlässigt werden:

$$0 = m_b \Delta \ddot{z} + \pi\rho_w g(r_0^2 - z_{b0}^2) \Delta z. \quad (44)$$

Wir erkennen die Schwingungs-DGL des ungedämpften Einmassenschwingers wieder, in welcher wir

$$\omega_0^2 = \frac{\pi\rho_w g(r_0^2 - z_{b0}^2)}{m_b} \quad (45)$$

identifizieren, was wiederum auf die Periodendauer $T = 2\pi/\omega_0$ führt. Man sollte beim Einsetzen beachten das die Masse des Balls und die Benetzungshöhe in der statischen Ruhelage nicht unabhängig voneinander sind, sondern $m_b = \pi\rho_w(r_0^2 z_{b0} - z_{b0}^3/3 + 2r_0^3/3)$ ist. Setzt man dies ein erhält man schließlich

$$\omega_0^2 = \frac{3g(r_0^2 - z_{b0}^2)}{3r_0^2 z_{b0} - z_{b0}^3 + 2r_0^3}. \quad (46)$$

Für den nahezu ganz eingetauchten Ball hat man eine gegen Null strebende Eigenfrequenz, für den kaum eingetauchten Ball strebt diese gegen unendlich. Für den halb eingetauchten Ball ergibt sich

$$\omega_0^2 = \frac{3g}{2r_0}. \quad (47)$$

3 Konjugierte Spannungs-Dehnungs-Maße

erfüllen

$$\mathbf{T}^{2\text{PK}} \cdot \dot{\mathbf{E}}^G = \mathbf{T}^{\text{gen}} \cdot \dot{\mathbf{E}}^{\text{gen}} \quad (48)$$

$$\frac{1}{2} \mathbf{T}^{2\text{PK}} \cdot \dot{\mathbf{C}} = \mathbf{T}^{\text{gen}} \cdot \left[\frac{\partial \mathbf{E}^{\text{gen}}}{\partial \mathbf{C}} \right] [\dot{\mathbf{C}}] \quad (49)$$

$$\frac{1}{2} \mathbf{T}^{2\text{PK}} \cdot \dot{\mathbf{C}} = \left[\frac{\partial \mathbf{E}^{\text{gen}}}{\partial \mathbf{C}} \right]^T [\mathbf{T}^{\text{gen}}] \cdot \dot{\mathbf{C}}, \quad (50)$$

also ist

$$\mathbf{T}^{\text{gen}} = \left[\frac{\partial \mathbf{E}^{\text{gen}}}{\partial \mathbf{C}} \right]^{-T} \left[\frac{1}{2} \mathbf{T}^{2\text{PK}} \right] = \mathbb{A} \left[\frac{1}{2} \mathbf{T}^{2\text{PK}} \right]. \quad (51)$$

Wir ermitteln nun die Ableitung für den Fall der Seth-Dehnungen,

$$\mathbf{E}^{\text{gen}} = \frac{1}{m} (\mathbf{C}^{m/2} - \mathbf{I}) \quad (52)$$

Die Ableitung $\partial \mathbf{C}^\alpha / \partial \mathbf{C}$ kann über die Spektraldarstellung auf die Ableitung der Eigenwerte und Eigenprojektoren nach \mathbf{C} reduziert werden,

$$\frac{\partial \mathbf{C}^\alpha}{\partial \mathbf{C}} = \sum_{i=1,3} \alpha \lambda_i^{\alpha-1} \mathbf{P}_{ii} \otimes \frac{\partial \lambda_i}{\partial \mathbf{C}} + \lambda_i^\alpha \frac{\partial \mathbf{P}_{ii}}{\partial \mathbf{C}} \quad (53)$$

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial \mathbf{C}} = \mathbf{P}_{ii}, \quad \frac{\partial \mathbf{P}_{ii}}{\partial \mathbf{C}} = (\lambda_i - \lambda_{i+1})^{-1} \mathbb{P}_{i \ i+1 \ i \ i+1}^S + (\lambda_i - \lambda_{i+2})^{-1} \mathbb{P}_{i \ i+2 \ i \ i+2}^S \quad (54)$$

mit

$$\mathbf{P}_{ij} = \mathbf{u}_i \otimes \mathbf{u}_j, \quad \mathbb{P}_{ijkl} = \mathbf{u}_i \otimes \mathbf{u}_j \otimes \mathbf{u}_k \otimes \mathbf{u}_l, \quad \mathbb{P}^S = \mathbb{P} + \mathbb{P}^T, \quad (55)$$

wobei λ_i und \mathbf{u}_i die Eigenwerte und Eigenvektoren von \mathbf{C} sind. Insgesamt ergibt sich

$$\frac{\partial \mathbf{C}^\alpha}{\partial \mathbf{C}} = \sum_{i=1,3} \alpha \lambda_i^{\alpha-1} \mathbb{P}_{iiii} + \frac{\lambda_i^\alpha}{\lambda_i - \lambda_{i+1}} \mathbb{P}_{i \ i+1 \ i \ i+1}^S + \frac{\lambda_i^\alpha}{\lambda_i - \lambda_{i+2}} \mathbb{P}_{i \ i+2 \ i \ i+2}^S \quad (56)$$

$$= \alpha (\lambda_1^{\alpha-1} \mathbb{P}_{1111} + \lambda_2^{\alpha-1} \mathbb{P}_{2222} + \lambda_3^{\alpha-1} \mathbb{P}_{3333}) + \quad (57)$$

$$\frac{\lambda_1^\alpha - \lambda_2^\alpha}{\lambda_1 - \lambda_2} \mathbb{P}_{1212}^S + \frac{\lambda_1^\alpha - \lambda_3^\alpha}{\lambda_1 - \lambda_3} \mathbb{P}_{1313}^S + \frac{\lambda_2^\alpha - \lambda_3^\alpha}{\lambda_2 - \lambda_3} \mathbb{P}_{2323}^S \quad (58)$$

Letzterer Tensor muss mit dem Vorfaktor $1/m$ versehen, $\alpha = m/2$ ersetzt und anschließend invertiert und transponiert werden. Glücklicherweise hat er bereits die Hauptsymmetrie und steht in der Spektraldarstellung da (Eigentensoren sind \mathbf{P}_{ij}), so dass die Invertierung leicht fällt.

$$\mathbb{A} = \left(\frac{1}{m} \frac{\partial \mathbf{C}^{m/2}}{\partial \mathbf{C}} \right)^{-1} = 2 (\lambda_1^{1-m/2} \mathbb{P}_{1111} + \lambda_2^{1-m/2} \mathbb{P}_{2222} + \lambda_3^{1-m/2} \mathbb{P}_{3333}) + \quad (59)$$

$$m \left(\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1^{m/2} - \lambda_2^{m/2}} \mathbb{P}_{1212}^S + \frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_1^{m/2} - \lambda_3^{m/2}} \mathbb{P}_{1313}^S + \frac{\lambda_2 - \lambda_3}{\lambda_2^{m/2} - \lambda_3^{m/2}} \mathbb{P}_{2323}^S \right). \quad (60)$$

Wir können noch $\lambda_i = \mu_i^2$ einsetzen, wobei μ_i die Eigenwerte von \mathbf{U} sind,

$$\mathbb{A} = 2 (\mu_1^{2-m} \mathbb{P}_{1111} + \mu_2^{2-m} \mathbb{P}_{2222} + \mu_3^{2-m} \mathbb{P}_{3333}) + \quad (61)$$

$$m \left(\frac{\mu_1^2 - \mu_2^2}{\mu_1^m - \mu_2^m} \mathbb{P}_{1212}^S + \frac{\mu_1^2 - \mu_3^2}{\mu_1^m - \mu_3^m} \mathbb{P}_{1313}^S + \frac{\mu_2^2 - \mu_3^2}{\mu_2^m - \mu_3^m} \mathbb{P}_{2323}^S \right). \quad (62)$$

Mit $\mathbf{T}^{\text{gen}} = \frac{1}{2}\mathbb{A}[\mathbf{T}^{2\text{PK}}]$ können die Komponenten von \mathbf{T}^{gen} angegeben werden,

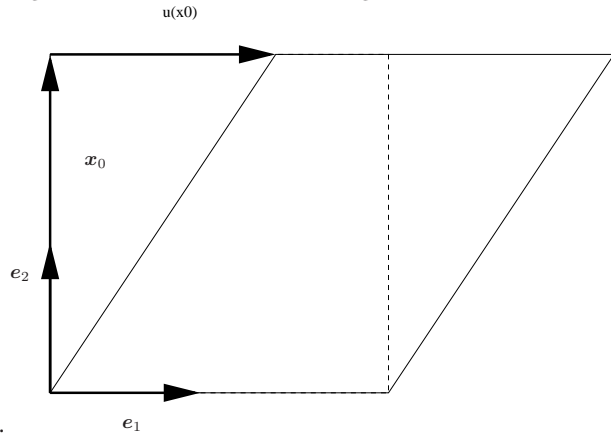
$$T_{11}^{\text{gen}} = T_{11}^{2\text{PK}} \mu_1^{2-m} \quad \text{22- und 33-Komponenten analog} \quad (63)$$

$$T_{12}^{\text{gen}} = \frac{m}{2} \frac{\mu_1^2 - \mu_2^2}{\mu_1^m - \mu_2^m} T_{12}^{2\text{PK}} \quad \text{13- und 23-Komponenten analog,} \quad (64)$$

wobei als Basis $\mathbf{u}_i \otimes \mathbf{u}_j$ verwendet wurde. Die Probe $m = 2$ liefert $T_{ij}^{\text{gen}} = T_{ij}^{2\text{PK}}$, es scheint also zu stimmen.

4 Einfache Scherung

Die skizzierte Deformation wird als einfache Scherung bezeichnet. Die Scherrichtung ist $\mathbf{d} = \mathbf{e}_1$, die Scherebene $\mathbf{n} = \mathbf{e}_2$.



ist $\mathbf{n} = \mathbf{e}_2$, die Scherzahl ist $\gamma = |\mathbf{u}(\mathbf{x}_0)|/(\mathbf{x}_0 \cdot \mathbf{n})$.

Die Verschiebung eines Punktes wächst proportional mit dem Abstand des Punktes \mathbf{x}_0 von der Ebene durch den Koordinatenursprung normal zu \mathbf{n} ab, mit der Scherzahl γ als Proportionalitätsfaktor, und findet in Richtung von \mathbf{d} statt. \mathbf{n} und \mathbf{d} sind normiert und stehen senkrecht aufeinander.

Aufgabe:

- Geben Sie $\mathbf{x}(\mathbf{x}_0)$ an.
- Geben Sie $\mathbf{F} = \mathbf{x} \otimes \nabla$ an.
- Geben Sie $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}$ und $\mathbf{B} = \mathbf{F} \mathbf{F}^T$ an.
- Geben Sie die Eigenwerte und Eigenrichtungen von \mathbf{B} und \mathbf{C} an. Untersuchen Sie deren Verhalten für $\gamma \rightarrow 0$ und $\gamma \rightarrow \infty$.
- Geben Sie \mathbf{R} aus der polaren Zerlegung von \mathbf{F} an. Untersuchen Sie das Verhalten für $\gamma \rightarrow 0$ und $\gamma \rightarrow \infty$.
- Diskutieren Sie die Deformation. Machen Sie eine Skizze.

Lösung:

- $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \gamma(\mathbf{x}_0 \cdot \mathbf{n})\mathbf{d}$
- $\mathbf{F} = \mathbf{I} + \gamma\mathbf{d} \otimes \mathbf{n}$
- $\mathbf{C} = \mathbf{I} + \gamma(\mathbf{d} \otimes \mathbf{n} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{d}) + \gamma^2\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}$,
 $\mathbf{B} = \mathbf{I} + \gamma(\mathbf{d} \otimes \mathbf{n} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{d}) + \gamma^2\mathbf{d} \otimes \mathbf{d}$
- Beide haben einen Eins-Eigenwert in Richtung von \mathbf{e}_3 , alles Interessante spielt sich in der 1-2-Ebene ab. Man findet die Eigenrichtungen am einfachsten durch einen Ansatz \mathbf{u} bzw. $\mathbf{v} = \cos\theta\mathbf{e}_1 + \sin\theta\mathbf{e}_2$, ranmultiplizieren an \mathbf{C} bzw. \mathbf{B} , und Erheben der Forderungen $\lambda\mathbf{v} = \mathbf{B}\mathbf{v}$ und $\lambda\mathbf{u} = \mathbf{C}\mathbf{u}$. Es ergibt sich jeweils $\tan\theta = \pm\gamma/2 \pm \sqrt{1 + \gamma^2/4}$, $+\gamma/2$ bei \mathbf{C} und $-\gamma/2$ bei \mathbf{B} . Die zwei Lösungen entsprechen den beiden Eigenrichtungen in der Ebene. Die Eigenwerte folgen sofort. Für γ gegen 0 und ∞ findet man jeweils das sich die Eigenrichtungen von den Flächendiagonalen in der 1-2-Ebene aus für $\gamma \rightarrow \infty$ um $\pi/4$ jeweils mit dem Uhrzeigersinn bei \mathbf{B} und gegen den Uhrzeigersinn bei \mathbf{C} drehen.
- Wir haben $\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{V}\mathbf{R}$, $\mathbf{U} = \sqrt{\mathbf{C}}$, $\mathbf{V} = \sqrt{\mathbf{B}}$. Anstatt \mathbf{U} oder \mathbf{V} aus den Wurzeln der Eigenwerte und den jeweiligen Eigenrichtungen von \mathbf{C} bzw. \mathbf{B} aufzubauen und die Inverse an \mathbf{F} jeweils von links

oder rechts ranzumultiplizieren sollte man direkt die Matrixmultiplikation betrachten.

$$F_{ij} = R_{ik}U_{kj} = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & 0 \\ U_{12} & U_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (65)$$

Die Drehung kann sich nur in der 1-2-Ebene abspielen, ebenso ist \mathbf{U} nur auf der oberen linken 2×2 -Matrix besetzt und symmetrisch. Man kann nun die 4 relevanten Gleichungen hinschreiben und nach ϕ lösen, $\tan \phi = -\gamma/2$ ist das Ergebnis. Der Winkel startet bei $\gamma = 0$ ebenfalls bei 0 und tendiert für $\gamma \rightarrow \infty$ gegen $-\pi/2$.

- Die Eigenrichtungen der Dehnungstensoren koinzidieren anfangs, und laufen dann auseinander. Die Hauptdehnungsrichtungen sind Anfangs die Flächendiagonalen der 1-2-Ebene (Streckung in Richtung von $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$), Stauchung in Richtung von $\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$. Für $\gamma \rightarrow \infty$ geht die Scherung in einen isochoren Zugversuch in der \mathbf{e}_1 -Richtung über. Anschaulicher sind die Eigenrichtungen von \mathbf{B} . Man sieht wie die Drehung \mathbf{R} von \mathbf{u}_i nach \mathbf{v}_i vermittelt. Es wäre sicher am einfachsten gewesen direkt nach finden der Eigenrichtungen $\mathbf{R} = \mathbf{v}_i \otimes \mathbf{u}_i$ zu notieren.

5 Inverse eines transversalisotropen Tensors 4ter Stufe mit Sub- und Hauptsymmetrien

Ergebnis aus der Darstellungstheorie:

$$\mathbb{C} = \sum_{i=1,5} c_i \mathbb{B}_i \quad (66)$$

$$\mathbb{B}_1 = \mathbb{I} \quad (67)$$

$$\mathbb{B}_2 = \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \quad (68)$$

$$\mathbb{B}_3 = \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \quad (69)$$

$$\mathbb{B}_4 = \underbrace{\mathbf{I} \otimes \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}}_{\mathbb{B}_{41}} + \underbrace{\mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \otimes \mathbf{I}}_{\mathbb{B}_{42}} \quad (70)$$

$$\mathbb{B}_5 = [\mathbf{I}, \mathbf{n}, \mathbf{n}]_{1324,1423,2314,2413} = (\delta_{ik} n_j n_l + \delta_{il} n_j n_k + \delta_{jk} n_i n_l + \delta_{jl} n_i n_k) \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l \quad (71)$$

Inverse $\mathbb{S} = \mathbb{C}^{-1}$:

$$c_i s_j \mathbb{B}_i \mathbb{B}_j = \mathbb{I} = \mathbb{B}_1. \quad (72)$$

Tabelle für $\mathbb{B}_i \mathbb{B}_j$ anlegen:

$i \downarrow, j \rightarrow$	1	2	3	4	5
1	\mathbb{B}_1	\mathbb{B}_2	\mathbb{B}_3	\mathbb{B}_4	\mathbb{B}_5
2	\mathbb{B}_2	$3\mathbb{B}_2$	\mathbb{B}_{41}	$\mathbb{B}_2 + 3\mathbb{B}_{41}$	$4\mathbb{B}_{41}$
3	\mathbb{B}_3	\mathbb{B}_{42}	\mathbb{B}_3	$\mathbb{B}_3 + \mathbb{B}_{42}$	$4\mathbb{B}_3$
4	\mathbb{B}_4	$\mathbb{B}_2 + 3\mathbb{B}_{42}$	$\mathbb{B}_3 + \mathbb{B}_{41}$	$\mathbb{B}_2 + 3\mathbb{B}_3 + \mathbb{B}_4$	$4\mathbb{B}_3 + 4\mathbb{B}_{41}$
5	\mathbb{B}_5	$4\mathbb{B}_{42}$	$4\mathbb{B}_3$	$4\mathbb{B}_3 + 4\mathbb{B}_{42}$	$8\mathbb{B}_3 + 2\mathbb{B}_5$

Ausrechnen:

$$c_i s_j \mathbb{B}_i \mathbb{B}_j = \quad (73)$$

$$c_1 s_1 \mathbb{B}_1 + \quad (74)$$

$$c_1 s_2 + c_2 s_1 + 3c_2 s_2 + c_2 s_4 + c_4 s_2 + c_4 s_4 \mathbb{B}_2 + \quad (75)$$

$$c_1 s_3 + c_3 s_1 + 4c_3 s_5 + 4c_5 s_3 + c_3 s_3 + c_3 s_4 + c_4 s_3 + 3c_4 s_4 + 4c_4 s_5 + 4c_5 s_4 + 8c_5 s_5 \mathbb{B}_3 + \quad (76)$$

$$c_1 s_4 + c_4 s_1 + c_2 s_3 + 3c_2 s_4 + 4c_2 s_5 + c_4 s_3 + c_4 s_4 + 4c_4 s_5 \mathbb{B}_{41} + \quad (77)$$

$$c_1 s_4 + c_4 s_1 + c_3 s_2 + 3c_4 s_2 + 4c_5 s_2 + c_3 s_4 + c_4 s_4 + 4c_5 s_4 \mathbb{B}_{42} + \quad (78)$$

$$c_1 s_5 + c_5 s_1 + 2c_5 s_5 \mathbb{B}_5 \quad (79)$$

Man kann nun durch Koeffizientenvergleich 6 Gleichungen für 5 Unbekannte erhalten. Aufgrund der Tatsache das $\mathbb{C}\mathbb{S} = \mathbb{S}\mathbb{C} = \mathbb{I} = \mathbb{B}_1$ sein muss sind die c und s in letzteren Gleichungen vertauschbar. Dem trägt man durch Addition der Komponenten vor \mathbb{B}_{41} und \mathbb{B}_{42} Rechnung. Das GS der Größe 5 wurde mit Mathematica gelöst. Es ist aber linear in den s_i .

eqs = {

$$c_1 s_1 == 1,$$

$$c_1 s_2 + c_2 s_1 + 3 c_2 s_2 + c_4 s_2 + c_2 s_4 + c_4 s_4 == 0,$$

$$c_1 s_3 + c_3 s_1 + c_3 s_3 + c_3 s_4 + c_4 s_3 + 3 c_4 s_4 + 4 c_4 s_5 + 4 c_5 s_4 + 8 c_5 s_5 + 4 c_3 s_5 + 4 c_5 s_3 == 0,$$

$$2 c_1 s_4 + 2 c_4 s_1 + c_2 s_3 + c_3 s_2 + 3 c_2 s_4 + 3 c_4 s_2 + 4 c_2 s_5 +$$

$$4 c_5 s_2 + c_4 s_3 + c_3 s_4 + 2 c_4 s_4 + 4 c_4 s_5 + 4 c_5 s_4 == 0,$$

$$c_1 s_5 + c_5 s_1 + 2 c_5 s_5 == 0\}$$

FullSimplify[Solve[eqs, {s1, s2, s3, s4, s5}]]

Die Lösung ist

$$s_1 = \frac{1}{c_1}, \tag{80}$$

$$s_2 = \frac{c_4^2 - c_2(c_1 + c_3 + 4c_5)}{c_1(c_1^2 - 2c_4^2 + 2c_2(c_3 + 4c_5) + c_1(3c_2 + c_3 + 2c_4 + 4c_5))}, \tag{81}$$

$$s_3 = \frac{-c_1(c_1 + 3c_2)c_3 + 3c_1c_4^2 + 2((c_1 + c_2)c_3 + 4c_1c_4 - c_4^2)c_5 + 8(c_1 + c_2)c_5^2}{c_1(c_1 + 2c_5)(c_1^2 - 2c_4^2 + 2c_2(c_3 + 4c_5) + c_1(3c_2 + c_3 + 2c_4 + 4c_5))}, \tag{82}$$

$$s_4 = \frac{-c_4(c_1 + c_4) + c_2(c_3 + 4c_5)}{c_1(c_1^2 - 2c_4^2 + 2c_2(c_3 + 4c_5) + c_1(3c_2 + c_3 + 2c_4 + 4c_5))}, \tag{83}$$

$$s_5 = -\frac{c_5}{c_1^2 + 2c_1c_5}. \tag{84}$$

6 Rohrströmung/Umrühren

Aufgabe: Ein inkompressibles Fluid ($\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{D}$) ist zwischen zwei koaxial rotierenden Zylinderschalen ($r_i, \omega_i, r_a, \omega_a$) eingeschlossen. Parallel zur Zylinderachse wirkt die Schwerkraft, die Zylinder drehen sich gegeneinander. Ermitteln Sie die Form der Flüssigkeitsoberfläche $z(r)$.

Lösung: Wir betrachten den stationären Zustand in Zylinderkoordinaten. Wir verwenden erstmal nur Eulersche Koordinaten, da bei Fluiden die Einführung einer Referenzplatzierung meistens wenig sinnvoll ist. Das Geschwindigkeitsfeld muss wegen der Rotationssymmetrie und Stationarität von der Form

$$\mathbf{v} = v_\phi(r)\mathbf{e}_\phi \quad (85)$$

sein. Dies setzen wir ins Materialgesetz ein, wobei mit Zylinderkoordinaten zu rechnen ist, d.h.

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial r}\mathbf{e}_r(\phi) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\phi}\mathbf{e}_\phi(\phi) + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{e}_z, \quad (86)$$

$$\mathbf{e}_r(\phi),_\phi = \mathbf{e}_\phi(\phi), \quad (87)$$

$$\mathbf{e}_\phi(\phi),_\phi = -\mathbf{e}_r(\phi). \quad (88)$$

Man findet

$$\mathbf{T} = \mu(v'_\phi - v_\phi/r)(\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_\phi + \mathbf{e}_\phi \otimes \mathbf{e}_r) + p(r, z)\mathbf{I}, \quad (89)$$

wobei p aufgrund der Rotationssymmetrie nicht von ϕ abhängt. Nun muss noch $\mathbf{T} \cdot \nabla$ ermittelt werden. Es ergibt sich

$$\mathbf{T} \cdot \nabla = p_{,r}\mathbf{e}_r + \mu(v''_\phi + v'_\phi/r - v_\phi/r^2)\mathbf{e}_\phi + p_{,z}\mathbf{e}_z. \quad (90)$$

Dies setzen wir in

$$\mathbf{T} \cdot \nabla = \rho(\mathbf{a} - \mathbf{b}) \quad (91)$$

ein. Wegen der Inkompressibilität ist ρ ein konstanter Parameter. Die linke Seite von Cauchy 1 ist nun bekannt. Für die rechte Seite benötigen wir noch die Beschleunigung. Wir betrachten ein stationäres, Eulersches Geschwindigkeitsfeld. Dies ist zeitunabhängig. Uns ist dennoch klar das die Kreisbahnen der Fluidteilchen eine Zentrifugalkraft- und Beschleunigung erfordern. Um die Beschleunigung zu ermitteln reicht es nicht, einen Raumpunkt mit durchfließender Materie zu betrachten. Man muss ein Teilchen einen infinitesimal kurzen Weg lang verfolgen und schauen wie sich dessen Geschwindigkeit ändert. Wir müssen also ϕ und r als Zeitabhängig auffassen, und mit der Kettenregel nach t ableiten:

$$\mathbf{a} = v'_\phi \dot{r} \mathbf{e}_\phi(\phi) - v_\phi \mathbf{e}_r(\phi) \dot{\phi}. \quad (92)$$

Dies ist der konvektive Teil der materiellen Zeitableitung, wenn diese Eulersch geschrieben wird. Hätten wir eine explizite Abhängigkeit von t , müssten wir zusätzlich noch den substantiellen Teil additiv berücksichtigen. Mit dem Wissen das $\dot{r} = 0$ und $\dot{\phi} = v_\phi/r$ sind hat man

$$\mathbf{a} = -\frac{v_\phi^2}{r}\mathbf{e}_r(\phi). \quad (93)$$

Das Gravitationsfeld wird durch $\mathbf{b} = -g\mathbf{e}_z$ berücksichtigt. Alles in Cauchy 1 eingesetzt liefert drei Gleichungen, nämlich

$$-p_{,r} = -\rho v_\phi^2/r, \quad (94)$$

$$0 = v''_\phi + v'_\phi/r - v_\phi/r^2, \quad (95)$$

$$-p_{,z} = \rho g. \quad (96)$$

Die mittlere der drei Gleichungen lässt sich für v_ϕ lösen und an die Randbedingungen anpassen.

$$v_\phi = C_1/r + C_2 r, \quad (97)$$

$$C_1 = \frac{r_a r_i (-r_i v_a + r_a v_i)}{r_a^2 - r_i^2} \quad (98)$$

$$C_2 = \frac{r_a v_a - r_i v_i}{r_a^2 - r_i^2} \quad (99)$$

$$v_{i/a} = r_{i/a} \omega_{i/a}. \quad (100)$$

Dann kann man durch Integrieren $p(r, z)$ ermitteln.

$$p = g\rho z + \frac{\rho}{2} \left(\frac{C_1^2}{r^2} - C_2^2 r^2 - 4C_1 C_2 \ln(r) \right) \quad (101)$$

An der Oberfläche haben wir den Umgebungsdruck p_0 . Das Ganze lässt sich leicht nach z auflösen,

$$z = \frac{p_0}{g\rho} - \frac{1}{2g} \left(\frac{C_1^2}{r^2} - C_2^2 r^2 - 4C_1 C_2 \ln(r) \right). \quad (102)$$

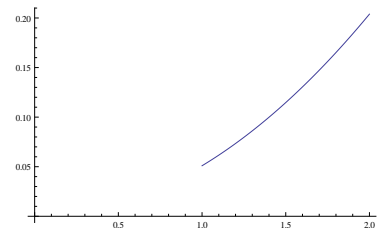
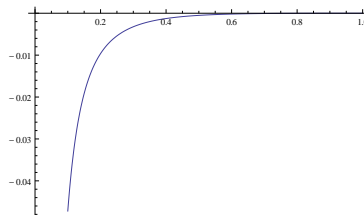
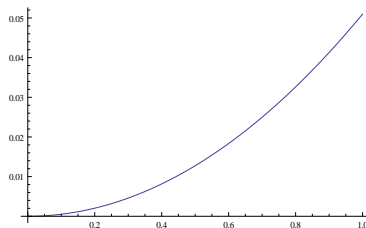
Somit ist die Linie entlang $p = 0$, also die Fluidoberfläche, als Funktion $z(r)$ gegeben. Der Druck p_0 bewirkt nur eine Parallelverschiebung der komplizierteren Funktion entlang e_z . Für den Newtonschen Eimerversuch muss $v_i = 0$ und $r_i = 0$ gesetzt werden, woraus sich $C_1 = 0$ und $C_2 = v_a/r_a$ ergeben. *Hier muss der Grenzübergang wegen des ln-Terms berechnet werden, nach der Regel von Bernoulli.* Die Flüssigkeitsoberfläche ergibt sich als Rotationsparabel. Interessant ist auch der Fall $\omega_1 = \omega_2$. Obwohl es sich um eine Starrkörperdrehung handelt gibt es eine Abhängigkeit der Verformung und der Spannung von der Winkelgeschwindigkeit. Dies hat jedoch nichts mit dem Prinzip der materiellen Objektivität zu tun, da es sich um ein Randwertproblem handelt, und nicht um ein Materialgesetz. Interessant sind auch die Fälle $\omega_a = 0$ oder $\omega_i = 0$, mit jeweils $r_i = 0$. Diese kann man leicht experimentell nachvollziehen, mit einem Stabmixer in einem ruhenden Gefäß, oder einem rotierenden Becher. Weiterhin ist es interessant, das Moment, das auf den Zylindern wirkt zu berechnen. Hier ein Mathematica-Skript:

```
Remove["Global`*"]
v[r_] = C1/r + C2 r;
erg = Solve[{v[ri] == vi, v[ra] == va}, {C1, C2}];
Set @@@ erg[[1]];
pr = FullSimplify[Integrate[-v[r]^2/r, r]];
erg2 = Solve[g*z + pr == 0, z];
Set @@@ erg2[[1]];
g = 9.81;

(* Newtonscher Eimerversuch *)
ri = 0; vi = 0; ra = 1; va = 1; Plot[z, {r, ri, ra}, PlotRange -> All, AxesOrigin -> {0, 0}]

(* Stabmixer in Tasse, Singularität abgeschnitten *)
ri = 0.1; vi = 1; ra = 1; va = 0; Plot[z, {r, ri, ra}, PlotRange -> All, AxesOrigin -> {0, 0}]

(* Drehung einer Ring-Rinne *)
ri = 1; vi = 1; ra = 2; va = 2; Plot[z, {r, ri, ra}, PlotRange -> All, AxesOrigin -> {0, 0}]
```



Vorschläge für die Übung:

- Dualbasen. Basis vorgeben, Duale bestimmen, Metrikkoeffizienten.
- Verschiedene Produkte mit gleicher- und Dualbasis darstellen... Skalarprod. und dyadisches profitieren von Dualbasendarst., Kreuzprodukt nicht.
- Eigenwertproblem mit Invarianten, Cayley-Hamilton diskutieren. Darstellung für die Inverse eines Tensors. Tensorflächen.
- Eigenwertproblem ausführlich mit Dualbasen zeigen, Spektraldarstellung diskutieren. Darauf aufbauend die Verallgemeinerung reeller Funktionen auf Tensoren: Erst die Potenz, dann diskutieren das man jede Funktion durch Potenzreihe darstellen kann... Zeigen das das auf die Anwendung der reellen Funktion auf die EW in der Spektraldarstellung führt. Das ganze für $Q=\exp(W)$ durchexerzieren, und die Formel für Q als Fkt. des axialen Vektors herleiten.
- Tensormengen: Verschiedene Mengen diskutieren. Schnittmengen berechnen, z.B. ORTH+ geschnitten SYM. Übersichtstabelle machen mit der Menge und dem gesammelten Wissen zu den Elementen dieser Menge, also: Eventuelle Darstellungssätze, Ungleichungen für die Invarianten oder Eigenwerte, eventuell vorhandene Gruppeneigenschaften bezüglich der Addition oder der Hintereinanderschaltung.
- Tensoren höherer Stufe benutzen. Diverse bekannte lineare Abbildungen von Tensoren 2ter Stufe in dieselben mit Tensoren 4ter Stufe schreiben (symA, skwA, transpositionA, devA, isoA ... ?). Den Permutationstensor benutzen um $W=\text{eps} \cdot w$ zu schreiben, etc.
- Ableitungen: erst mal nur Komponentenweise, bei konstanter ONB, z.B. Norm eines Tensors nach sich selbst, die Invarianten nach dem Tensor ableiten. Dann die Linearisierung einer T-Wertigen T-Funktion, z.B. $\exp(A)$, an einer bestimmten Stelle A_0 . Zeigen das das Ergebnis für $A_0=0$ frappierend nach der 1D-Lösung im reellen aussieht.
- Jetzt Analysis in krummlinigen Koordinaten beginnen. Den ganzen Kram für Kugelkoordinaten durchziehen, mit Christoffels und physikalischen Komponenten F und $\text{div}T$ ermitteln.
- Generalisierte Dehnmaße, zugeordnete Spannungen.
- Bestimmen von F und $T \cdot \nabla$ in Kugelkoordinaten