Lineare Algebra

1 Reelle Matrizen

Hinweis: Die *komplexen* Matrizen werden in Abschnitt VII.4 behandelt.

1.1 Grundbegriffe

1.1.1 Definition einer reellen Matrix

Unter einer reellen *Matrix* $\mathbf{A}$ vom Typ (m, n) versteht man ein aus $m \cdot n$ reellen Zahlen bestehendes rechteckiges Schema mit m waagerecht angeordneten *Zeilen* und n senkrecht angeordneten *Spalten*:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ik} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mk} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \leftarrow i\text{-te Zeile} \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$\uparrow$$
$$k\text{-te Spalte}$$

Bezeichnungen

a_{ik}: Matrixelement
i: Zeilenindex $(i = 1, 2, \dots, m)$
k: Spaltenindex $(k = 1, 2, \dots, n)$

Schreibweisen

$$\mathbf{A}, \ \mathbf{A}_{(m,\,n)}, \ (a_{ik}), \ (a_{ik})_{(m,\,n)}$$

Die m Zeilen werden auch als *Zeilenvektoren* (mit hochgestelltem Index), die n Spalten auch als *Spaltenvektoren* (mit tiefgestelltem Index) bezeichnet[1].

---

[1] n reelle Zahlen in einer bestimmten Reihenfolge bilden einen sog. *n-dimensionalen* Vektor. Die Gesamtheit dieser Vektoren bilden den Vektorraum $\mathbb{R}^n$ $(n = 2, 3, \dots)$.

Schreibweisen

$$\underbrace{\mathbf{a}^{i} = (a_{i1} \quad a_{i2} \quad \dots \quad a_{in})}_{i\text{-ter Zeilenvektor}} \qquad\qquad \underbrace{\mathbf{a}_{k} = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{pmatrix}}_{k\text{-ter Spaltenvektor}}$$

Die Matrix $\mathbf{A}$ ist dann wie folgt darstellbar:

$$\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \dots \quad \mathbf{a}_n) = \begin{pmatrix} \mathbf{a}^{1} \\ \mathbf{a}^{2} \\ \vdots \\ \mathbf{a}^{m} \end{pmatrix}$$

(Zeile aus n Spaltenvektoren bzw. Spalte aus m Zeilenvektoren)

1.1.2 Spezielle Matrizen

Nullmatrix $\mathbf{0}$:	*Alle* Elemente sind Null.
Spaltenmatrix:	Matrix mit nur *einer* Spalte, auch *Spaltenvektor* genannt.
Zeilenmatrix:	Matrix mit nur *einer* Zeile, auch *Zeilenvektor* genannt.
Quadratische Matrix:	Matrix mit *gleichvielen* Zeilen und Spalten ($m = n$; *n-reihige* Matrix, Matrix *n-ter Ordnung*).
Transponierte Matrix $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$:	Sie entsteht aus der (m, n)-Matrix $\mathbf{A}$, indem man Zeilen und Spalten miteinander *vertauscht* („Stürzen“ einer Matrix). $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ ist daher vom Typ (n, m). Es gilt stets $(\mathbf{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}$.

1.1.3 Gleichheit von Matrizen

Zwei Matrizen $\mathbf{A} = (a_{ik})$ und $\mathbf{B} = (b_{ik})$ vom *gleichen* Typ heißen *gleich*, $\mathbf{A} = \mathbf{B}$, wenn sie in ihren entsprechenden Elementen übereinstimmen: $a_{ik} = b_{ik}$ für alle i, k.

1.2 Spezielle quadratische Matrizen

Allgemeine Gestalt einer *n-reihigen, quadratischen* Matrix:

Hauptdiagonale Nebendiagonale

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Spur einer quadratischen Matrix

Die Summe aller Hauptdiagonalelemente heißt *Spur* der Matrix $\mathbf{A}$:

$$\operatorname{Sp}(\mathbf{A}) = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$$

1.2.1 Diagonalmatrix

Alle *außerhalb* der Hauptdiagonalen liegenden Elemente *verschwinden:*

$$a_{ik} = 0 \quad \text{für alle} \quad i \neq k$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Schreibweise: $\mathbf{diag}\,(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$

1.2.2 Einheitsmatrix

Diagonalmatrix mit

$$a_{ii} = 1 \quad \text{für alle} \quad i$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

Schreibweisen: $\mathbf{E}$, $\mathbf{I}$, (δ_{ik})

1.2.3 Dreiecksmatrix

Alle Elemente *oberhalb* bzw. *unterhalb* der Hauptdiagonalen *verschwinden:*

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{\textit{Untere}\ \text{Dreiecksmatrix:}} \qquad \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{\textit{Obere}\ \text{Dreiecksmatrix:}}$$

$a_{ik} = 0$ für alle $i < k$ $\qquad$ $a_{ik} = 0$ für alle $i > k$

1.2.4 Symmetrische Matrix

Alle *spiegelbildlich* zur Hauptdiagonalen stehenden Elemente sind *paarweise gleich*:

$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \mathbf{A} \quad \text{oder} \quad a_{ik} = a_{ki} \quad \text{für alle} \quad i, k$$

1.2.5 Schiefsymmetrische Matrix

$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = -\mathbf{A} \quad \text{oder} \quad a_{ik} = -a_{ki} \quad \text{für alle} \quad i, k$$

Die *Hauptdiagonaleelemente* verschwinden: $a_{ii} = 0$ für alle i.

1.2.6 Orthogonale Matrix

$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}^{-1}$$

Die Zeilen- bzw. Spaltenvektoren sind zueinander *orthogonal* und *normiert*, es ist stets $\det \mathbf{A} = 1$ oder $\det \mathbf{A} = -1$ und $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}$. Eine *orthogonale* Matrix ist immer *regulär*.

1.3 Rechenoperationen für Matrizen

1.3.1 Addition und Subtraktion von Matrizen

Zwei Matrizen vom *gleichen* Typ werden *addiert* bzw. *subtrahiert*, indem man ihre entsprechenden (d. h. gleichstelligen) Elemente *addiert* bzw. *subtrahiert:*

$$\mathbf{A} \pm \mathbf{B} = (a_{ik}) \pm (b_{ik}) = (a_{ik} \pm b_{ik}) \qquad (i = 1, 2, \ldots, m;\ k = 1, 2, \ldots, n)$$

Rechenregeln

$\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ sind Matrizen vom *gleichen* Typ:

Kommutativgesetz $\quad \mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$

Assoziativgesetz $\quad \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$

Transponieren $\quad (\mathbf{A} + \mathbf{B})^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}} + \mathbf{B}^{\mathrm{T}}$

1.3.2 Multiplikation einer Matrix mit einem Skalar

Die *Multiplikation* einer Matrix mit einem reellen *Skalar* erfolgt, indem man *jedes* Matrixelement mit dem Skalar multipliziert:

$$\lambda \cdot \mathbf{A} = \lambda \cdot (a_{ik}) = (\lambda \cdot a_{ik}) \qquad (\lambda \in \mathbb{R};\ i = 1, 2, \ldots, m;\ k = 1, 2, \ldots, n)$$

Rechenregeln

$\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ sind Matrizen vom *gleichen* Typ, λ und μ *reelle* Skalare:

Assoziativgesetz $\quad \lambda(\mu \mathbf{A}) = \mu(\lambda \mathbf{A}) = (\lambda \mu) \mathbf{A}$

Distributivgesetze $\quad (\lambda + \mu) \mathbf{A} = \lambda \mathbf{A} + \mu \mathbf{A}$

$\quad \lambda(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \lambda \mathbf{A} + \lambda \mathbf{B}$

Transponieren $\quad (\lambda \mathbf{A})^{\mathrm{T}} = \lambda \mathbf{A}^{\mathrm{T}}$

1.3.3 Multiplikation von Matrizen

$\mathbf{A} = (a_{ik})$ sei eine Matrix vom Typ (m, n), $\mathbf{B} = (b_{ik})$ eine Matrix vom Typ (n, p). Dann heißt die (m, p)-Matrix $\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = (c_{ik})$ mit

$$c_{ik} = a_{i1} b_{1k} + a_{i2} b_{2k} + \ldots + a_{in} b_{nk} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}$$

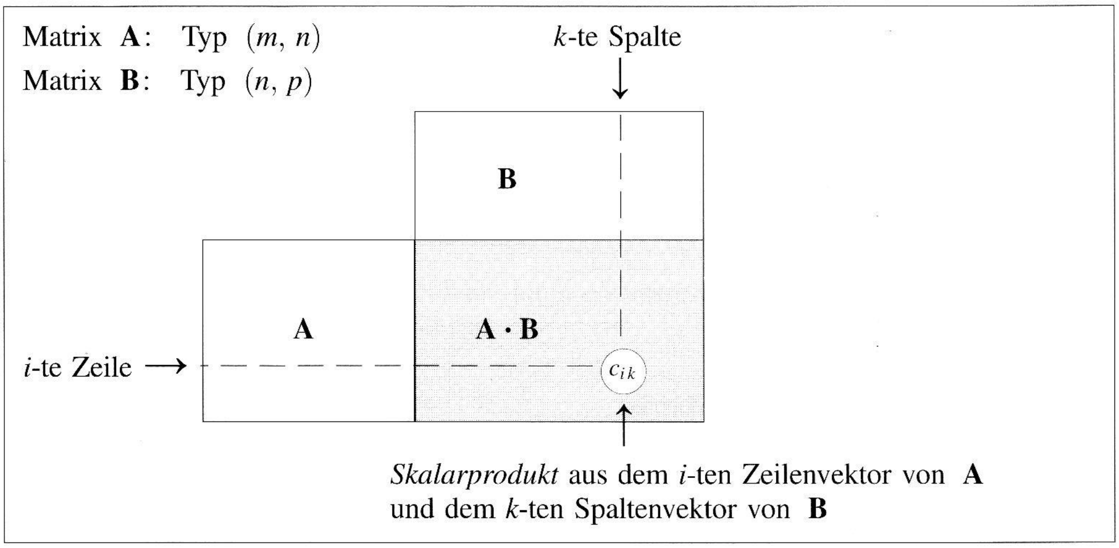
das *Produkt* der Matrizen $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ $(i = 1, 2, \ldots, m;\ k = 1, 2, \ldots, p)$.

Anmerkungen

(1) Die Produktbildung ist nur möglich, wenn die *Spaltenzahl* von $\mathbf{A}$ mit der *Zeilenzahl* von $\mathbf{B}$ *übereinstimmt*. Der Multiplikationspunkt darf auch weggelassen werden.

(2) Das Matrixelement c_{ik} des Matrizenproduktes $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ ist das *Skalarprodukt* aus dem *i-ten Zeilenvektor* von $\mathbf{A}$ und dem *k-ten Spaltenvektor* von $\mathbf{B}$ (siehe *Falk-Schema* weiter unten).

Falk-Schema zur Berechnung eines Matrizenproduktes C = A · B



Rechenregeln

Voraussetzung: Alle Rechenoperationen der *linken* Seiten müssen durchführbar sein.

Assoziativgesetz $\quad \mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C}$

Distributivgesetze $\quad \mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$

$\quad (\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC}$

Transponieren $\quad (\mathbf{AB})^{\mathrm{T}} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}} \mathbf{A}^{\mathrm{T}}$

Man beachte, daß die Matrizenmultiplikation *nicht kommutativ* ist.

■ **Beispiel**

Wir berechnen das *Matrizenprodukt* $\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ mit $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$:

$$\begin{array}{cccc|cccc} & & & & 1 & 4 & 3 & 0 \\ & & & \mathbf{B} & 1 & 1 & -1 & 3 \\ & & & & 0 & -2 & -3 & 2 \\ \hline \mathbf{A} & 1 & 0 & 3 & 1 & -2 & -6 & 6 \\ & 2 & 1 & -4 & 3 & 17 & 17 & -5 \end{array} \qquad \Rightarrow \quad \mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -6 & 6 \\ 3 & 17 & 17 & -5 \end{pmatrix}$$

$\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$

■

1.4 Reguläre Matrix

Eine n-reihige, quadratische Matrix $\mathbf{A}$ heißt *regulär*, wenn ihre Determinante einen von Null verschiedenen Wert besitzt: $\det \mathbf{A} \neq 0$. Ihr *Rang* ist dann $\operatorname{Rg}(\mathbf{A}) = n$.

Ist $\det \mathbf{A} = 0$, so heißt $\mathbf{A}$ *singulär*. Es ist dann $\operatorname{Rg}(\mathbf{A}) < n$.

■ **Beispiele**

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 8 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 8 \end{vmatrix} = 33 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A} \text{ ist } \textit{regulär}$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -3 & 15 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det \mathbf{B} = \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ -3 & 15 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{B} \text{ ist } \textit{singulär}$$

■

1.5 Inverse Matrix

1.5.1 Definition einer inversen Matrix

Die *regulären* Matrizen (und nur diese) lassen sich *umkehren*, d. h. zu jeder *regulären* Matrix $\mathbf{A}$ gibt es genau eine *inverse* Matrix $\mathbf{A}^{-1}$ mit

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{E}$$

Eine quadratische Matrix $\mathbf{A}$ ist demnach genau dann *invertierbar*, wenn $\det \mathbf{A} \neq 0$ und somit $\operatorname{Rg}(\mathbf{A}) = n$ ist.

Weitere Bezeichnungen für $\mathbf{A}^{-1}$: *Kehrmatrix*, *Umkehrmatrix* oder *Inverse* von $\mathbf{A}$.

1.5.2 Berechnung einer inversen Matrix

1.5.2.1 Berechnung der inversen Matrix $\mathbf{A}^{-1}$ unter Verwendung von Unterdeterminanten

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \qquad (\det \mathbf{A} \neq 0)$$

A_{ik}: *Algebraisches Komplement (Adjunkte)* von a_{ik} in $\det \mathbf{A}$ $(A_{ik} = (-1)^{i+k} \cdot D_{ik})$

D_{ik}: $(n-1)$-reihige *Unterdeterminante* von $\det \mathbf{A}$ (in $\det \mathbf{A}$ wird die i-te Zeile und k-te Spalte gestrichen)

1.5.2.2 Berechnung der inversen Matrix $\mathbf{A}^{-1}$ nach dem Gaußschen Algorithmus (Gauß-Jordan-Verfahren)

Man bildet zunächst aus den n-reihigen Matrizen $\mathbf{A}$ und $\mathbf{E}$ (Einheitsmatrix) die Matrix

$$(\mathbf{A} \mid \mathbf{E}) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array} \right)$$

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{\mathbf{A}} \qquad \underbrace{\qquad\qquad}_{\mathbf{E}}$$

vom Typ $(n, 2n)$ und bringt diese dann durch *elementare Zeilenumformungen* (siehe hierzu VII.1.6.1.3 und VII.3.4.1) auf die spezielle Form

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \dots & 0 & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{array} \right) = (\mathbf{E} \mid \mathbf{A}^{-1})$$

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{\mathbf{E}} \qquad \underbrace{\qquad\qquad}_{\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}}$$

Dies ist bei einer *regulären* und daher *umkehrbaren* Matrix $\mathbf{A}$ stets möglich. Die Einheitsmatrix $\mathbf{E}$ hat jetzt den Platz der Matrix $\mathbf{A}$ eingenommen, die Matrix $\mathbf{B}$ ist die gesuchte *inverse* Matrix $\mathbf{A}^{-1}$.

■ **Beispiel**

Die 3-reihige Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -7 \end{pmatrix}$ ist *regulär* und somit *invertierbar* ($\det \mathbf{A} = 1$). Für ihre *Inverse* $\mathbf{A}^{-1}$ erhalten wir (die jeweils durchgeführte Operation wird rechts angeschrieben; Z_i: i-te Zeile):

$$(\mathbf{A} \mid \mathbf{E}) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -7 \end{matrix}}_{\mathbf{A}} & \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{\mathbf{E}} \end{array}\right) \begin{matrix} \\ -4Z_1 \\ -3Z_1 \end{matrix} \;\Rightarrow\; \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -7 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -13 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \\ -2Z_1 \end{matrix} \;\Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -7 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} -2Z_3 \\ 3Z_3 \\ \\ \end{matrix} \;\Rightarrow\; \left(\begin{array}{ccc|ccc} \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{\mathbf{E}} & \underbrace{\begin{matrix} -9 & 4 & -2 \\ 31 & -13 & 7 \\ 5 & -2 & 1 \end{matrix}}_{\mathbf{A}^{-1}} \end{array}\right) = (\mathbf{E} \mid \mathbf{A}^{-1})$$

Somit gilt: $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -9 & 4 & -2 \\ 31 & -13 & 7 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ ■

1.6 Rang einer Matrix

1.6.1 Definitionen

1.6.1.1 Unterdeterminanten einer Matrix

Werden in einer Matrix $\mathbf{A}$ vom Typ (m, n) $m - p$ Zeilen und $n - p$ Spalten gestrichen, so heißt die Determinante der p-reihigen Restmatrix eine *Unterdeterminante p-ter Ordnung* oder *p-reihige Unterdeterminante* von $\mathbf{A}$.

1.6.1.2 Rang einer Matrix

Unter dem *Rang* einer Matrix $\mathbf{A}$ vom Typ (m, n) wird die *höchste* Ordnung r aller von Null verschiedenen Unterdeterminanten von $\mathbf{A}$ verstanden. Symbolische Schreibweise: $\operatorname{Rg}(\mathbf{A}) = r$.

1.6.1.3 Elementare Umformungen einer Matrix

Der *Rang* r einer Matrix $\mathbf{A}$ ändert sich *nicht*, wenn sie den folgenden *elementaren Umformungen* unterworfen wird:

1. Zwei Zeilen (oder Spalten) werden miteinander *vertauscht.*
2. Die Elemente einer Zeile (oder Spalte) werden mit einer beliebigen von Null verschiedenen Zahl *multipliziert* oder durch eine solche Zahl *dividiert.*
3. Zu einer Zeile (oder Spalte) wird ein beliebiges Vielfaches einer *anderen* Zeile (bzw. *anderen* Spalte) *addiert.*

1.6.2 Rangbestimmung einer Matrix

1.6.2.1 Rangbestimmung einer (m, n)-Matrix $\mathbf{A}$ unter Verwendung von Unterdeterminanten

Wir beschreiben das Verfahren für den Fall $m \le n$. Ist jedoch $m > n$, so ist im folgenden die Zahl m durch die Zahl n zu *ersetzen.*

1. Der *Rang* r der Matrix $\mathbf{A}$ ist höchstens gleich m, d. h. $r \le m$. Man berechnet daher zunächst die *m-reihigen* Unterdeterminanten von $\mathbf{A}$. Gibt es unter ihnen *wenigstens eine* von Null verschiedene Determinante, so ist $r = m$.
2. Verschwinden aber *sämtliche* m-reihigen Unterdeterminanten von $\mathbf{A}$, so ist r höchstens gleich $m - 1$. Es ist dann zu prüfen, ob es *wenigstens eine* von Null verschiedene $(m - 1)$-reihige Unterdeterminante gibt. Ist dies der Fall, so ist $r = m - 1$. Anderenfalls ist r höchstens gleich $m - 2$. Das beschriebene Verfahren wird dann solange fortgesetzt, bis man auf eine von Null verschiedene Unterdeterminante von $\mathbf{A}$ stößt. Die Ordnung dieser Determinante ist der gesuchte *Rang* der Matrix $\mathbf{A}$.

■ **Beispiel**

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad m = 2, \quad n = 3 \quad \text{und somit} \quad r \le 2.$$

Es gibt eine von Null verschiedene *2-reihige* Unterdeterminante, z. B. $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 8$ (in der Matrix $\mathbf{A}$ wurde die 3. Spalte gestrichen). Die Matrix $\mathbf{A}$ besitzt damit den *Rang* $r = 2$.

■

1.6.2.2 Rangbestimmung einer (m, n)-Matrix $\mathbf{A}$ mit Hilfe elementarer Umformungen

Die (m, n)-Matrix $\mathbf{A}$ wird zunächst mit Hilfe *elementarer Umformungen* in die folgende *Trapezform* gebracht $b_{ii} \neq 0$ für $i = 1, 2, \ldots, r$):

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1r} & b_{1,r+1} & b_{1,r+2} & \ldots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \ldots & b_{2r} & b_{2,r+1} & b_{2,r+2} & \ldots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & b_{rr} & b_{r,r+1} & b_{r,r+2} & \ldots & b_{rn} \\ \hline 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{array}{c} b \\ b \\ \vdots \\ b \end{array}}\right\} r \text{ Zeilen} \\ \left.\vphantom{\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array}}\right\} (m - r) \text{ Nullzeilen} \end{array}$$

Der *Rang von* $\mathbf{A}$ ist dann gleich der Anzahl r der *nicht-verschwindenden* Zeilen: $\text{Rg}\,(\mathbf{A}) = r$.

■ **Beispiel**

Wir bringen die (3,4)-Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 0 \\ 2 & 7 & -8 & 7 \\ -1 & 0 & 11 & 21 \end{pmatrix}$ mit Hilfe *elementarer Umformungen* zunächst in die gewünschte *Trapezform* und lesen aus dieser den Rang ab:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 0 \\ 2 & 7 & -8 & 7 \\ -1 & 0 & 11 & 21 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -2Z_1 \\ +Z_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 3 & 6 & 21 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -3Z_3 \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \leftarrow \text{Nullzeile} \end{matrix}$$

Somit gilt: $\operatorname{Rg}(\mathbf{A}) = 2$

■

2 Determinanten

Determinanten n-ter Ordnung (auch *n-reihige* Determinanten genannt) sind *reelle* Zahlen, die man den *n-reihigen quadratischen* Matrizen aufgrund einer bestimmten Rechenvorschrift zuordnet.

Schreibweisen

$$D,\ \det \mathbf{A},\ |\mathbf{A}|,\ |a_{ik}|,\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

a_{ik}: Elemente der Determinante $(i, k = 1, 2, \dots, n)$

2.1 Zweireihige Determinanten

Definition einer zweireihigen Determinante

Unter der *Determinante* einer *2-reihigen* Matrix $\mathbf{A} = (a_{ik})$ versteht man die *reelle* Zahl

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21}$$

Berechnung einer 2-reihigen Determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21}$$

——— Hauptdiagonale

– – – Nebendiagonale

Regel: Der Wert einer 2-reihigen Determinante ist gleich dem Produkt der beiden Hauptdiagonalelemente *minus* dem Produkt der beiden Nebendiagonalelemente.

■ **Beispiel**

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ -3 & 8 \end{vmatrix} = 4 \cdot 8 - (-3) \cdot 7 = 32 + 21 = 53$$

■

2.2 Dreireihige Determinanten

Definition einer dreireihigen Determinante

Unter der *Determinante* einer *3-reihigen* Matrix $\mathbf{A} = (a_{ik})$ versteht man die *reelle* Zahl

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}\,a_{22}\,a_{33} + a_{12}\,a_{23}\,a_{31} + a_{13}\,a_{21}\,a_{32} - a_{13}\,a_{22}\,a_{31} - a_{11}\,a_{23}\,a_{32} - a_{12}\,a_{21}\,a_{33}$$

Berechnung einer 3-reihigen Determinante nach der Regel von Sarrus

$$\begin{array}{ccc|cc} & & - & - & - \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\ & & + & + & + \end{array}$$

—— Hauptdiagonalprodukte
– – – Nebendiagonalprodukte

$$D = a_{11}\,a_{22}\,a_{33} + a_{12}\,a_{23}\,a_{31} + a_{13}\,a_{21}\,a_{32} - a_{13}\,a_{22}\,a_{31} - a_{11}\,a_{23}\,a_{32} - a_{12}\,a_{21}\,a_{33}$$

Regel: Die Spalten 1 und 2 der Determinante werden nochmals rechts an die Determinante gesetzt. Den Determinantenwert erhält man dann, indem man die drei Hauptdiagonalprodukte (——) *addiert* und von dieser Summe die drei Nebendiagonalprodukte (– – –) *subtrahiert.*

■ **Beispiel**

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 6 & 5 & 1 \end{vmatrix} = ?$$

$$\begin{array}{ccc|cc} & & - & - & - \\ 1 & -2 & 3 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 6 & 5 & 1 & 6 & 5 \\ & & + & + & + \end{array}$$

$$\det \mathbf{A} = 1 \cdot 0 \cdot 1 + (-2) \cdot 1 \cdot 6 + 3 \cdot 2 \cdot 5 - 6 \cdot 0 \cdot 3 - 5 \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot 2 \cdot (-2) = 17$$

■

2.3 Determinanten höherer Ordnung

2.3.1 Unterdeterminante D_{ik}

Die aus einer n-reihigen Determinante D durch Streichen der i-ten Zeile und k-ten Spalte hervorgehende $(n-1)$-reihige Determinante heißt *Unterdeterminante* D_{ik}:

$$D_{ik} = \begin{array}{l} \left| \begin{array}{cccccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ik} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk} & \dots & a_{nn} \end{array} \right| \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow i\text{-te Zeile} \\ \\ \\ \end{array} \\ \qquad\qquad\qquad \uparrow \\ \qquad\qquad\quad k\text{-te Spalte} \end{array}$$

2.3.2 Algebraisches Komplement (Adjunkte) A_{ik}

Die Größe $A_{ik} = (-1)^{i+k} \cdot D_{ik}$ heißt *algebraisches Komplement* oder *Adjunkte* des Elementes a_{ik} in der Determinante D. Der Vorzeichenfaktor $(-1)^{i+k}$ kann nach der *Schachbrettregel* bestimmt werden:

+	−	+	...
−	+	−	...
+	−	+	...
⋮	⋮	⋮	

Schachbrettregel: Der Vorzeichenfaktor von A_{ik} steht im *Schnittpunkt* der i-ten Zeile mit der k-ten Spalte.

2.3.3 Definition einer n-reihigen Determinante [2]

Der Wert einer *n-reihigen Determinante* $D = \det \mathbf{A}$ wird *rekursiv* nach der folgenden *„Entwicklungsformel“* berechnet (*„Entwicklung nach den Elementen der 1. Zeile“):*

$$D = \det \mathbf{A} = \sum_{k=1}^{n} a_{1k} A_{1k} = a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} + \dots + a_{1n} A_{1n}$$

A_{1k}: *Algebraisches Komplement (Adjunkte)* von a_{1k} in D

Prinzipiell läßt sich damit eine *n-reihige* Determinante durch *wiederholte* Anwendung der Entwicklungsformel auf *3-reihige* Determinanten zurückführen, die nach der *Regel von Sarrus* berechnet werden können. Dieses Verfahren erweist sich jedoch in der Praxis als *ungeeignet*, da die Anzahl der dabei anfallenden 3-reihigen Determinanten mit zunehmender Ordnung n der Determinante *rasch* ansteigt. *Beispiel:* Für $n = 5$ sind 20, für $n = 6$ bereits 120 3-reihige Determinanten zu berechnen! Ein *praktikables* Rechenverfahren wird in Abschnitt VII.2.6 angegeben.

[2] Für eine 1-reihige Matrix $\mathbf{A} = (a)$ wird $\det \mathbf{A} = a$ festgesetzt.

2.4 Laplacescher Entwicklungssatz

Eine n-reihige Determinante läßt sich nach den Elementen einer *beliebigen* Zeile oder Spalte entwickeln *(Laplacescher Entwicklungssatz):*

Entwicklung nach den Elementen der i-ten Zeile

$$D = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{ik} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

Entwicklung nach den Elementen der k-ten Spalte

$$D = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} A_{ik} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

A_{ik}: *Algebraisches Komplement (Adjunkte)* von a_{ik} in D $(A_{ik} = (-1)^{i+k} \cdot D_{ik})$

D_{ik}: $(n - 1)$-reihige *Unterdeterminante* von D (siehe VII.2.3.1)

■ **Beispiel**

Wir *entwickeln* die 4-reihige Determinante $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & -3 & 2 \\ 9 & 0 & 0 & 4 \\ 8 & 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ nach den Elementen der *3. Zeile:*

$$D = \underbrace{a_{31}}_{9} A_{31} + \underbrace{a_{32}}_{0} A_{32} + \underbrace{a_{33}}_{0} A_{33} + \underbrace{a_{34}}_{4} A_{34} = 9 A_{31} + 4 A_{34}$$

$$A_{31} = + \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -21, \qquad A_{34} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & -3 \\ 8 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 69$$

$$D = 9 A_{31} + 4 A_{34} = 9 \cdot (-21) + 4 \cdot (69) = -189 + 276 = 87$$

■

2.5 Rechenregeln für n-reihige Determinanten

Regel 1: Der Wert einer Determinante ändert sich *nicht*, wenn Zeilen und Spalten miteinander *vertauscht* werden („Stürzen" einer Determinante):

$$\det \mathbf{A} = \det \mathbf{A}^{T}$$

Regel 2: Beim Vertauschen *zweier* Zeilen (oder Spalten) *ändert* eine Determinante ihr *Vorzeichen.*

Regel 3: Werden die Elemente einer *beliebigen* Zeile (oder Spalte) mit einem Skalar λ multipliziert, so multipliziert sich die Determinante mit λ.

Regel 4: Eine Determinante wird mit einem Skalar λ multipliziert, indem man die Elemente einer *beliebigen* Zeile (oder Spalte) mit λ multipliziert.

Regel 5: Besitzen die Elemente einer Zeile (oder Spalte) einen *gemeinsamen* Faktor λ, so darf dieser *vor* die Determinante gezogen werden.

Regel 6: Eine Determinante besitzt den Wert *Null*, wenn sie eine der folgenden Bedingungen erfüllt:

1. *Alle* Elemente einer Zeile (oder Spalte) sind *Null.*
2. *Zwei* Zeilen (oder Spalten) sind *gleich.*
3. *Zwei* Zeilen (oder Spalten) sind zueinander *proportional.*
4. Eine Zeile (oder Spalte) ist als *Linearkombination* der *übrigen* Zeilen (bzw. Spalten) darstellbar.

Regel 7: Der Wert einer Determinante ändert sich *nicht*, wenn man zu einer Zeile (oder Spalte) ein beliebiges Vielfaches einer *anderen* Zeile (bzw. *anderen* Spalte) addiert..

Regel 8: Für zwei n-reihige Matrizen $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ gilt das Multiplikationstheorem:

$$\det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\det \mathbf{A}) \cdot (\det \mathbf{B})$$

Das heißt die Determinante eines *Matrizenproduktes* $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ ist gleich dem *Produkt* der Determinanten der beiden Faktoren $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$.

Regel 9: Die Determinante einer n-reihigen *Dreiecksmatrix* $\mathbf{A}$ besitzt den Wert

$$\det \mathbf{A} = a_{11}\, a_{22} \,\ldots\, a_{nn}$$

Das heißt die Determinante einer Dreiecksmatrix ist gleich dem *Produkt* der Hauptdiagonalelemente.

Regel 10: Für die Determinante der *inversen* Matrix von $\mathbf{A}$ gilt:

$$\det(\mathbf{A}^{-1}) = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \qquad (\det \mathbf{A} \neq 0)$$

■ **Beispiel**

Mit $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 5 \\ 1 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 8 \end{pmatrix}$ berechnen wir die Determinante des Matrizenprodukt $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ unter Verwendung des *Multiplikationstheorems* (Regel 8):

$$\det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\det \mathbf{A}) \cdot (\det \mathbf{B}) = \underbrace{\begin{vmatrix} 4 & -2 & 5 \\ 1 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}}_{5} \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 8 \end{vmatrix}}_{-6} = 5 \cdot (-6) = -30$$

■

2.6 Regeln zur praktischen Berechnung einer n-reihigen Determinante

2.6.1 Elementare Umformungen einer n-reihigen Determinante

Der Wert einer n-reihigen Determinante ändert sich *nicht*, wenn man eine der nachfolgenden *elementaren Umformungen* vornimmt:

1. Ein den Elementen einer Zeile (oder Spalte) *gemeinsamer* Faktor λ darf *vor* die Determinante gezogen werden (Regel 5).
2. Zu einer Zeile (oder Spalte) darf ein *beliebiges* Vielfaches einer *anderen* Zeile (bzw. *anderen* Spalte) addiert werden (Regel 7).
3. Zwei Zeilen (oder Spalten) dürfen miteinander *vertauscht* werden, wenn man zugleich das *Vorzeichen* der Determinante *ändert* (Folgerung aus Regel 2).

2.6.2 Reduzierung und Berechnung einer n-reihigen Determinante

Die *Berechnung* einer n-reihigen Determinante erfolgt für $n > 3$ nach dem folgenden Schema:

1. Mit Hilfe *elementarer Umformungen* werden zunächst die Elemente einer Zeile (oder Spalte) bis auf ein Element zu *Null* gemacht.
2. Dann wird die n-reihige Determinante nach den Elementen dieser Zeile (oder Spalte) *entwickelt*. Man erhält *genau eine* $(n-1)$-reihige Unterdeterminante.
3. Das unter 1. und 2. beschriebene Verfahren wird nun auf die $(n-1)$-reihige Unterdeterminante angewandt und führt zu *einer* $(n-2)$-reihigen Unterdeterminante. Durch *wiederholte Reduzierung* gelangt man schließlich zu *einer einzigen* 3-reihigen Determinante, deren Wert dann nach der *Regel von Sarrus* berechnet wird.

Hinweis: Um in einer *Zeile* (bzw. *Spalte*) Nullen zu erzeugen, sind *Spalten* (bzw. *Zeilen*) zu addieren.

■ **Beispiel**

Die 4-reihige Determinante $\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \\ -3 & 2 & 2 & -2 \\ -1 & -5 & -4 & 1 \end{vmatrix}$ läßt sich wie folgt mit Hilfe *elementarer Umformungen* auf eine 3-reihige Determinante zurückführen: Wir addieren zur zweiten, dritten und vierten Zeile der Reihe nach das (-2)-fache, 3-fache bzw. 1-fache der 1. Zeile und *entwickeln* die Determinante anschließend nach den Elementen der *1. Spalte:*

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & -7 & -7 & -5 \\ 0 & 14 & 11 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} -7 & -7 & -5 \\ 14 & 11 & 4 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix}}_{78} = 1 \cdot 78 = 78$$

Die Berechnung der 3-reihigen Determinante erfolgte dabei nach der *Regel von Sarrus.*

■

3 Lineare Gleichungssysteme

3.1 Grundbegriffe

3.1.1 Definition eines linearen Gleichungssystems

Ein aus m *linearen* Gleichungen mit n Unbekannten $x_1, x_2, \ldots, x_n$ bestehendes System

$$\begin{array}{llllll} a_{11}x_1 & + a_{12}x_2 & + \ldots & + a_{1n}x_n & = c_1 \\ a_{21}x_1 & + a_{22}x_2 & + \ldots & + a_{2n}x_n & = c_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + a_{m2}x_2 & + \ldots & + a_{mn}x_n & = c_m \end{array} \qquad \text{oder} \qquad \mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{c}$$

heißt *lineares Gleichungssystem* oder lineares (m, n)-System.

Bezeichnungen

A: Koeffizientenmatrix des Systems
x: Lösungsvektor
c: Spaltenvektor aus den *absoluten* Gliedern des Systems

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}$$

Erweiterte Koeffizientenmatrix (A | c)

$$(\mathbf{A} \mid \mathbf{c}) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & c_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & c_m \end{array}\right)$$

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{\mathbf{A}} \quad \underbrace{\quad}_{\mathbf{c}}$$

Die *erweiterte* Koeffizientenmatrix $(\mathbf{A} \mid \mathbf{c})$ spielt eine entscheidende Rolle bei der Untersuchung des *Lösungsverhaltens* eines linearen (m, n)-Systems (siehe VII.3.2).

3.1.2 Spezielle lineare Gleichungssysteme

Homogenes System:	$\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$	(*alle* $c_i = 0$, d. h. $\mathbf{c} = \mathbf{0}$)
Inhomogenes System:	$\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{c}$	(*nicht* alle $c_i = 0$, d. h. $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$)
Quadratisches System:	$m = n$	(auch (n, n)-System genannt)

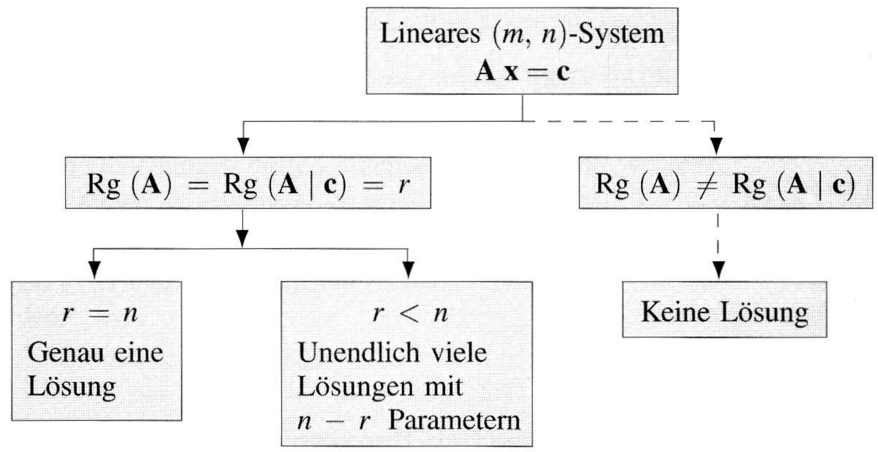
3.2 Lösungsverhalten eines linearen (m, n)-Gleichungssystems

3.2.1 Kriterium für die Lösbarkeit eines linearen (m, n)-Systems $\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{c}$

$$\operatorname{Rg}(\mathbf{A}) = \operatorname{Rg}(\mathbf{A} \mid \mathbf{c}) = r$$

Bei einem *homogenen* System $\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ist die Lösbarkeitsbedingung *immer* erfüllt. Ein *homogenes* System ist daher *stets* lösbar.

3.2.2 Lösungsmenge eines linearen (m, n)-Systems $\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{c}$



Der im Schema durch den *gestrichelten* Weg angedeutete Fall kann nur für ein *inhomogenes* System eintreten (ein *homogenes* System ist *stets* lösbar). Im einzelnen gilt somit:

Homogenes lineares (m, n)-Gleichungssystem $\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$

Das *homogene* System besitzt entweder genau *eine* Lösung, nämlich die *triviale* Lösung $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, oder *unendlich* viele Lösungen (darunter die *triviale* Lösung).

Inhomogenes lineares (m, n)-Gleichungssystem $\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{c}$ $(\mathbf{c} \neq \mathbf{0})$

Das *inhomogene* System besitzt entweder genau *eine* Lösung oder *unendlich* viele Lösungen oder *keine* Lösung.

■ **Beispiele**

(1) Wir prüfen, ob das *inhomogene* lineare (2,3)-System

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 - 4x_3 &= 8 \end{aligned}$$

lösbar ist.

Dazu bestimmen wir den *Rang* der Matrizen $\mathbf{A}$ und $(\mathbf{A} \mid \mathbf{c})$ mit Hilfe *elementarer Umformungen:*

$$(\mathbf{A} \mid \mathbf{c}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 8 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -Z_1 \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -5 & 7 \end{array}\right)$$

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{\mathbf{A}} \quad \underbrace{\quad}_{\mathbf{c}}$$

Die Matrizen $(\mathbf{A} \mid \mathbf{c})$ und $\mathbf{A}$ besitzen jetzt *Trapezform.* Es ist $\operatorname{Rg}(\mathbf{A}) = \operatorname{Rg}(\mathbf{A} \mid \mathbf{c}) = 2$. Das Gleichungssystem ist somit *lösbar.* Wegen $n - r = 3 - 2 = 1$ erhalten wir *unendlich* viele Lösungen mit *einem* Parameter.

(2) Wir zeigen, daß das *inhomogene* lineare (3,2)-System

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 9 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ -10 \end{pmatrix}$$

nicht lösbar ist:

$$(\mathbf{A} \mid \mathbf{c}) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 9 & 9 \\ 2 & -3 & -10 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -5Z_1 \\ -2Z_1 \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -11 \\ 0 & -7 & -18 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ -7Z_2 \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -11 \\ 0 & 0 & 59 \end{array}\right)$$

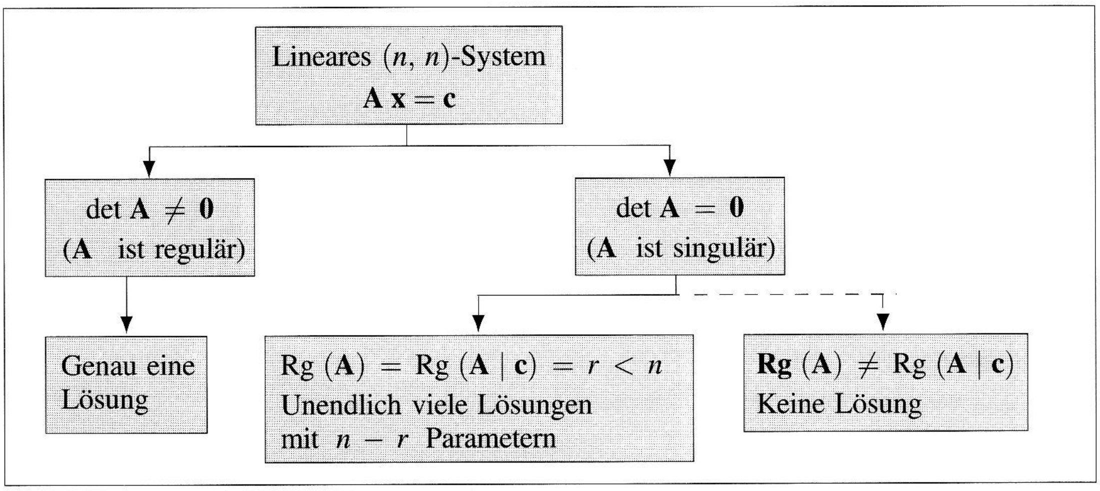
$$\underbrace{\qquad\quad}_{\mathbf{A}} \quad \underbrace{\quad}_{\mathbf{c}}$$

Die Matrizen $(\mathbf{A} \mid \mathbf{c})$ und $\mathbf{A}$ besitzen jetzt *Trapezform.* Es ist $\operatorname{Rg}(\mathbf{A}) = 2$, $\operatorname{Rg}(\mathbf{A} \mid \mathbf{c}) = 3$ und somit $\operatorname{Rg}(\mathbf{A}) \neq \operatorname{Rg}(\mathbf{A} \mid \mathbf{c})$. Das lineare Gleichungssystem ist daher *nicht* lösbar.

■

3.3 Lösungsverhalten eines quadratischen linearen Gleichungssystems

Für den Spezialfall eines *quadratischen* (n, n)-Systems gilt das folgende *Kriterium für die Lösbarkeit und Lösungsmenge:*



Ein *homogenes* lineares (n, n)-System $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ist *stets* lösbar. Für $\det \mathbf{A} \neq 0$ erhält man als *einzige* Lösung die *triviale* Lösung $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, im Falle $\det \mathbf{A} = 0$ besitzt das *homogene* System *unendlich* viele Lösungen mit $n - r$ Parametern. Der durch den *gestrichelten* Weg angedeutete Fall kann nur für ein *inhomogenes* System eintreten.

■ **Beispiel**

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 6 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 &= -3 \\ -x_1 - 4x_2 + 3x_3 &= 14 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & -4 & 3 \end{vmatrix} = 2$$

Das vorliegende quadratische lineare Gleichungssystem besitzt wegen $\det \mathbf{A} = 2 \neq 0$ eine *reguläre* Koeffizientenmatrix $\mathbf{A}$ und somit genau *eine* Lösung.

■

3.4 Lösungsverfahren für ein lineares Gleichungssystem nach Gauß (Gaußscher Algorithmus)

3.4.1 Äquivalente Umformungen eines linearen (m, n)-Systems

Umformungen, die die *Lösungsmenge* eines linearen (m, n)-Systems *nicht* verändern, heißen *äquivalente Umformungen.* Zu ihnen gehören:

1. Zwei Gleichungen dürfen miteinander *vertauscht* werden.
2. Jede Gleichung darf mit einer beliebigen von *Null* verschiedenen Zahl *multipliziert* oder durch eine solche Zahl *dividiert* werden.
3. Zu jeder Gleichung darf ein *beliebiges* Vielfaches einer *anderen* Gleichung *addiert* werden.

3.4.2 Gaußscher Algorithmus

Ein lineares (m, n)-Gleichungssystem $\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{c}$ läßt sich stets mit Hilfe *äquivalenter Umformungen* in ein äquivalentes *gestaffeltes* Gleichungssystem $\mathbf{A}^*\mathbf{x} = \mathbf{c}^*$ vom Typ

$$\begin{array}{rrrrrrrrcl}
a_{11}^* x_1 + & a_{12}^* x_2 + & \ldots + & a_{1r}^* x_r + & a_{1,r+1}^* x_{r+1} + & \ldots + & a_{1n}^* x_n & = & c_1^* \\
 & a_{22}^* x_2 + & \ldots + & a_{2r}^* x_r + & a_{2,r+1}^* x_{r+1} + & \ldots + & a_{2n}^* x_n & = & c_2^* \\
 & & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 & & & a_{rr}^* x_r + & a_{r,r+1}^* x_{r+1} + & \ldots + & a_{rn}^* x_n & = & c_r^* \\
 & & & & & & 0 & = & c_{r+1}^* \\
 & & & & & & 0 & = & c_{r+2}^* \\
 & & & & & & \vdots & & \vdots \\
 & & & & & & 0 & = & c_m^*
\end{array}$$

überführen $(a_{ii}^* \neq 0$ für $i = 1, 2, \ldots, r)$. Es ist dann und nur dann *lösbar,* wenn $c_{r+1}^* = c_{r+2}^* = \ldots = c_m^* = 0$ ist. Im Falle der *Lösbarkeit* erhält man somit ein *gestaffeltes* Gleichungssystem mit r Gleichungen und n Unbekannten, das *sukzessiv* von unten nach oben gelöst werden kann.

Dabei sind noch *zwei* Fälle zu unterscheiden:

1. Fall: $r = n$

Das gestaffelte System besteht aus n Gleichungen mit n Unbekannten und besitzt genau *eine* Lösung.

2. Fall: $r < n$

Das gestaffelte System enthält *weniger* Gleichungen (r) als Unbekannte (n). Daher sind $n - r$ der Unbekannten, z. B. $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$, *frei wählbare* Größen (Parameter). Man erhält dann *unendlich* viele Lösungen mit $n - r$ *Parametern.*

Beschreibung des Eliminationsverfahrens von Gauß

1. Im 1. Rechenschritt wird z. B. die Unbekannte x_1 *eliminiert*, indem man zur i-ten Gleichung das $-(a_{i1}/a_{11})$-fache der 1. Gleichung addiert $(a_{11} \neq 0;\ i = 2, 3, \ldots, m)$. Bei der Addition *verschwindet* dann jeweils x_1.
2. Das unter 1. beschriebene Verfahren wird jetzt auf das *reduzierte* Gleichungssystem, bestehend aus $m - 1$ Gleichungen mit den $n - 1$ Unbekannten $x_2, x_3, \ldots, x_n$, angewandt. Dadurch wird die nächste Unbekannte (z. B. x_2) eliminiert (Voraussetzung: $a_{22} \neq 0$). Nach insgesamt $m - 1$ Schritten bleibt *eine* Gleichung mit *einer* oder *mehreren* Unbekannten übrig.
3. Die Eliminationsgleichungen bilden dann zusammen mit der letzten Gleichung ein *gestaffeltes* lineares Gleichungssystem, aus dem sich die Unbekannten *sukzessiv* von unten nach oben berechnen lassen.
4. Sollte bei einem Schritt die weiter oben genannte Voraussetzung (Diagonalelement $\neq 0$) *nicht* erfüllt sein, so muß eine *Zeilenvertauschung* vorgenommen werden, um zu einem von Null *verschiedenen* Pivotelement zu gelangen. Der Prozeß endet, wenn eine solche Vertauschung nicht mehr möglich ist.

Anmerkungen

(1) Es spielt keine Rolle, in welcher Reihenfolge die Unbekannten eliminiert werden.

(2) Den *äquivalenten Umformungen* eines linearen Gleichungssystems $\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{c}$ entsprechen in der Matrizendarstellung *elementare Zeilenumformungen* in der *erweiterten* Koeffizientenmatrix $(\mathbf{A} \mid \mathbf{c})$. Damit ergibt sich der folgende Lösungsweg:

   1. Zunächst wird die *erweiterte* Koeffizientenmatrix $(\mathbf{A} \mid \mathbf{c})$ mit Hilfe *elementarer Zeilenumformungen* in die Trapezform $(\mathbf{A}^* \mid \mathbf{c}^*)$ gebracht (dies ist im Falle der Lösbarkeit *stets* möglich).
   2. Anschließend wird das äquivalente *gestaffelte* System $\mathbf{A}^*\mathbf{x} = \mathbf{c}^*$ sukzessiv von unten nach oben gelöst.

■ **Beispiele**

(1) Wir lösen da lineare (3,3)-Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 6 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 &= -3 \\ -x_1 - 4x_2 + 3x_3 &= 14 \end{aligned}$$

mit Hilfe des *Gaußschen Algorithmus*. Das System besitzt wegen $\det \mathbf{A} = 2 \neq 0$ genau eine Lösung. Wir verwenden hier das „elementare" Rechenschema mit *Zeilensummenprobe* (E: *eliminierte* Gleichung; c_i: Absolutglied; s_i: Zeilensumme):

	x_1	x_2	x_3	c_i	s_i
$\boxed{E_1}$	1	−2	1	6	6
	2	1	−1	−3	−1
$-2 \cdot E_1$	−2	4	−2	−12	−12
	−1	−4	3	14	12
E_1	1	−2	1	6	6
$\boxed{E_2}$		5	−3	−15	−13
		−6	4	20	18
$1{,}2 \cdot E_2$		6	−3,6	−18	−15,6
			0,4	2	2,4

Die *grau* unterlegten Zeilen bilden das gesuchte *gestaffelte* System.

Gestaffeltes System

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 6 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 1 \\ 5x_2 - 3x_3 &= -15 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 0 \\ 0{,}4x_3 &= 2 \quad \Rightarrow \quad x_3 = 5 \end{aligned}$$

Lösung: $x_1 = 1, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 5$

(2) Ist das *homogene* lineare (4,3)-Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 0 \\ x_2 - x_3 &= 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 &= 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 &= 0 \end{aligned}$$

nicht-trivial lösbar?

Zunächst bringen wir die Koeffizientenmatrix $\mathbf{A}$ auf *Trapezform:*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -3Z_1 \\ -3Z_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -Z_2 \\ -2Z_2 \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{Nullzeilen}$$

Es ist $r = \mathrm{Rg}(\mathbf{A}) = 2$, $n = 3$, d. h. $r < n$. Das homogene System ist somit *nicht-trivial* lösbar. Das *gestaffelte* Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 0 \\ x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$$

wird gelöst durch $x_1 = -3\lambda$, $x_2 = \lambda$, $x_3 = \lambda$ (x_3 wurde als Parameter gewählt; $\lambda \in \mathbb{R}$). ■

3.5 Cramersche Regel

Ein *quadratisches* lineares (n, n)-Gleichungssystem $\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{c}$ mit *regulärer* Koeffizientenmatrix $\mathbf{A}$ besitzt die *eindeutig* bestimmte Lösung

$$x_i = \frac{D_i}{D} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

(*Cramersche Regel;* nur für *kleines* n praktikabel).

D: Koeffizientendeterminante $(D = \det \mathbf{A} \neq 0)$

D_i: Hilfsdeterminante, die aus D hervorgeht, indem man die i-te Spalte durch die Absolutglieder $c_1, c_2, \ldots, c_n$ des Gleichungssystems ersetzt.

■ **Beispiel**

Das *quadratische* lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 &= -7 \\ 5x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 1 \end{aligned}$$

besitzt eine *reguläre* Koeffizientenmatrix $\mathbf{A}$ und ist somit *eindeutig* lösbar:

$$D = \det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 5 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

Berechnung der benötigten *Hilfsdeterminanten:*

$$D_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -7 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -2, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -7 & 3 \\ 5 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -4, \quad D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -7 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 4$$

Lösung: $x_1 = \dfrac{D_1}{D} = \dfrac{-2}{-2} = 1, \quad x_2 = \dfrac{D_2}{D} = \dfrac{-4}{-2} = 2, \quad x_3 = \dfrac{D_3}{D} = \dfrac{4}{-2} = -2$ ■

3.6 Lineare Unabhängigkeit von Vektoren

n Vektoren $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ aus dem m-dimensionalen Raum $\mathbb{R}^m$ heißen *linear unabhängig*, wenn die lineare Vektorgleichung

$$\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \ldots + \lambda_n \mathbf{a}_n = \mathbf{0}$$

nur für $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$ erfüllt werden kann. Verschwinden jedoch *nicht alle* Koeffizienten in dieser Gleichung, so heißen die Vektoren *linear abhängig.* Im Falle der linearen Abhängigkeit gibt es also *mindestens einen* von Null verschiedenen Koeffizienten.

Enthält das Vektorsystem $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ den *Nullvektor* oder zwei *gleiche* (oder *kollineare*) Vektoren oder ist *mindestens einer* der Vektoren als Linearkombination der übrigen darstellbar, so sind die Vektoren *linear abhängig.*

Kriterium für linear unabhängige Vektoren

Die n Vektoren $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ des Raumes $\mathbb{R}^m$ werden zu einer Matrix $\mathbf{A}$ vom Typ (m, n) zusammengefaßt. Der *Rang* r dieser Matrix entscheidet dann darüber, ob die Vektoren linear unabhängig sind oder nicht. Es gilt:

$r = n$	$\Rightarrow$	linear unabhängig
$r < n$	$\Rightarrow$	linear abhängig

Ist $\mathbf{A}$ *quadratisch*, d. h. liegen n Vektoren des $\mathbb{R}^n$ vor, so gelten folgende Aussagen:

(1) $\mathbf{A}$ ist *regulär*, d. h. $\det \mathbf{A} \neq 0 \quad \Rightarrow$ linear unabhängig

(2) $\mathbf{A}$ ist *singulär*, d. h. $\det \mathbf{A} = 0 \quad \Rightarrow$ linear abhängig

(3) Im $\mathbb{R}^n$ gibt es *maximal* n linear unabhängige Vektoren.

■ **Beispiel**

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A} \text{ ist } \textit{regulär}$$

Die drei Vektoren sind daher *linear unabhängig*.

■

5 Eigenwertprobleme

5.1 Eigenwerte und Eigenvektoren einer quadratischen Matrix

Ist $\mathbf{A}$ eine n-reihige (reelle oder komplexe) Matrix und $\mathbf{E}$ die n-reihige *Einheitsmatrix*, so wird durch die Matrizengleichung

$$\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \lambda\,\mathbf{x} \qquad \text{oder} \qquad (\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{E})\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

ein sog. *n-dimensionales Eigenwertproblem* beschrieben. Diese auch als *Eigenwertgleichung* bezeichnete Gleichung repräsentiert ein homogenes lineares Gleichungssystem mit dem noch unbekannten Parameter λ.

Bezeichnungen

λ: *Eigenwert* der Matrix $\mathbf{A}$

$\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$: *Eigenvektor* der Matrix $\mathbf{A}$ zum Eigenwert λ

$\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{E}$: *Charakteristische Matrix* von $\mathbf{A}$

Die Eigenwerte und Eigenvektoren lassen sich schrittweise wie folgt berechnen:

1. Die *Eigenwerte* sind die Lösungen der sog. *charakteristischen Gleichung*

   $$\det(\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{E}) = 0$$

   (algebraische Gleichung n-ten Grades mit n Lösungen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$).

2. Der zum Eigenwert λ_i gehörende *Eigenvektor* $\mathbf{x}_i$ ergibt sich als Lösungsvektor des homogenen linearen Gleichungssystems

   $$(\mathbf{A} - \lambda_i\,\mathbf{E})\,\mathbf{x}_i = \mathbf{0} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

   Er wird üblicherweise in der *normierten* Form angegeben. (Bei einem *mehrfachen* Eigenwert können auch *mehrere* Eigenvektoren auftreten, siehe weiter unten).

Die Eigenwerte der Matrix $\mathbf{A}$ sind die *Nullstellen* des charakteristischen Polynoms $p(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{E})$.

Die Eigenwerte und Eigenvektoren besitzen die folgenden Eigenschaften:

1. Die *Spur* der Matrix $\mathbf{A}$ ist gleich der *Summe* aller Eigenwerte:

   $$\operatorname{Sp}(\mathbf{A}) = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n$$

2. Die *Determinante* von $\mathbf{A}$ ist gleich dem *Produkt* aller Eigenwerte:

   $$\det \mathbf{A} = \lambda_1\,\lambda_2 \ldots \lambda_n$$

3. Sind *alle* Eigenwerte voneinander *verschieden*, so gehört zu jedem Eigenwert *ein* Eigenvektor, der bis auf einen (beliebigen) konstanten Faktor eindeutig bestimmt ist. Die n Eigenvektoren werden üblicherweise *normiert* und sind *linear unabhängig*.

4. Tritt ein Eigenwert dagegen *k-fach* auf, so gehören hierzu *mindestens ein, höchstens* aber k linear unabhängige Eigenvektoren.

5. Die zu *verschiedenen* Eigenwerten gehörenden Eigenvektoren sind immer *linear unabhängig*.

■ **Beispiel**

$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ Wie lauten die *Eigenwerte* und *Eigenvektoren* dieser Matrix?

Charakteristische Matrix:

$$\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{E} = \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2-\lambda & -5 \\ 1 & 4-\lambda \end{pmatrix}$$

Charakteristische Gleichung mit Lösungen:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{E}) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & -5 \\ 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (-2-\lambda)(4-\lambda) + 5 =$$

$$= \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = -1, \qquad \lambda_2 = 3$$

Eigenwerte der Matrix $\mathbf{A}$: $\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 3$

Berechnung des Eigenvektors zum Eigenwert $\lambda_1 = -1$:

$$(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{E})\,\mathbf{x} = (\mathbf{A} + \mathbf{E})\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{aligned} -x_1 - 5x_2 &= 0 \\ x_1 + 5x_2 &= 0 \end{aligned}$$

Lösung (bitte nachrechnen): $x_1 = -5\,\alpha, \quad x_2 = \alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R})$

Normierter Eigenvektor: $\tilde{\mathbf{x}}_1 = \frac{1}{\sqrt{26}} \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix}$

Analog wird der (normierte) Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_2 = 3$ bestimmt: $\tilde{\mathbf{x}}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ergebnis: Das 2-dimensionale Eigenwertproblem führt zu zwei verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = 3$, die zugehörigen Eigenvektoren $\tilde{\mathbf{x}}_1$ und $\tilde{\mathbf{x}}_2$ sind daher *linear unabhängig*.

■

5.2 Eigenwerte und Eigenvektoren spezieller n-reihiger Matrizen

Bei einer Diagonal- bzw. Dreiecksmatrix

Die Eigenwerte sind identisch mit den *Hauptdiagonalelementen:* $\lambda_i = a_{ii} \; (i = 1, 2, \ldots, n)$

Bei einer symmetrischen Matrix

Die Eigenwerte und Eigenvektoren einer n-reihigen *symmetrischen* Matrix $\mathbf{A}$ besitzen die folgenden Eigenschaften:

1. Alle n Eigenwerte sind *reell.*
2. Es gibt insgesamt genau n *linear unabhängige* Eigenvektoren.
3. Zu jedem *einfachen* Eigenwert gehört genau *ein* linear unabhängiger Eigenvektor, zu jedem *k-fachen* Eigenwert dagegen genau k linear unabhängige Eigenvektoren.
4. Eigenvektoren, die zu *verschiedenen* Eigenwerten gehören, sind *orthogonal.*

Bei einer hermiteschen Matrix

Die Eigenwerte und Eigenvektoren einer n-reihigen *hermiteschen* Matrix $\mathbf{A}$ besitzen die folgenden Eigenschaften:

1. Alle n Eigenwerte sind *reell.*
2. Es gibt insgesamt genau n *linear unabhängige* Eigenvektoren.
3. Zu jedem *einfachen* Eigenwert gehört genau *ein* linear unabhängiger Eigenvektor, zu jedem *k-fachen* Eigenwert dagegen stets k linear unabhängige Eigenvektoren.

Aufgaben zur Matrizenrechnung

Gegeben seinen folgende drei Vektoren $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Überprüfung der linearen Unabhängigkeit dieser Vektoren: $\det[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] \neq 0$

$\det\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \neq 0?$ $\det = 3$, das heißt, dass die Vektoren linear unabhängig sind.

$$\mathbf{a}^T\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = 2 + 2 + 9 = 13$$

$$\mathbf{a}\ \mathbf{b}^T = \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 6 \\ 6 & 3 & 9 \end{bmatrix}$$

Diese Matrix ist nicht invertierbar, da die Zeilen Vielfache voneinander sind.

$$\det \mathbf{A} = 36 + 36 + 36 - 36 - 36 - 36 = 0$$

Deshalb ist die Determinante gleich Null, d.h. die Matrix ist singulär.

Die Berechnung der Determinante erfolgt nach dem Entwicklungssatz (Schachbrettregel für die Vorzeichen beachten) oder für dreireihige Matrizen nach der Regel von SARRUS.

Definieren wir nun eine reguläre Matrix.

$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ Die transponierte Matrix ist $\mathbf{B}^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, Zeilen und Spalten sind getauscht.

$\det \mathbf{B} = 4 + 9 + 2 - 6 - 12 - 1 = -4$, das heißt die Matrix ist regulär und kann invertiert werden.

$$\mathbf{B}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{B}}\begin{bmatrix} 3 & -5 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -4 & 8 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{5}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{4}{4} & -\frac{8}{4} & \frac{4}{4} \end{bmatrix}$$

Es gilt $\mathbf{B}\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = diag\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ Das sollten Sie überprüfen!

(Berechnen Sie zur Übung $\mathbf{B} \cdot \mathbf{a}$ und $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$.)

Quadratische Matrizen lassen sich in einen symmetrischen und antimetrischen Anteil aufspalten. Es gilt $\mathbf{B} = \mathbf{B}_{sym} + \mathbf{B}_{asym}$.

$$\mathbf{B}_{sym} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{B}+\mathbf{B}^T\right) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{2} & 2 \\ \frac{5}{2} & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_{asym} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{B}-\mathbf{B}^T\right) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Der asymmetrische Anteil ist spurfrei. Die Spur der Matrix ist die Summe der Hauptdiagonalelemente.

$$sp(\mathbf{B}) = 5, \quad sp(\mathbf{B}_{sym}) = 5, \quad sp(\mathbf{B}_{asym}) = 0$$

Ein **lineares Gleichungssystem** in Vektor-Matrix-Schreibweise hat die Form $\mathbf{B}\cdot\mathbf{x}=\mathbf{b}$. Es muss nach dem Vektor der Unbekannten $\mathbf{x}$ umgestellt werden. (Es kann nicht durch $\mathbf{B}$ dividiert werden!)

$$\mathbf{B}\cdot\mathbf{x}=\mathbf{b}$$

$$\underbrace{\mathbf{B}^{-1}\cdot\mathbf{B}}_{\mathbf{I}}\cdot\mathbf{x}=\mathbf{B}^{-1}\cdot\mathbf{b}$$

$$\mathbf{x}=\mathbf{B}^{-1}\cdot\mathbf{b}=\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Für das Gleichungssystem $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{y}=\mathbf{a}$ ergibt sich demnach $\mathbf{y}=\mathbf{B}\cdot\mathbf{a}=\begin{bmatrix} 10 \\ 9 \\ 11 \end{bmatrix}$.

Berechnung von **Eigenwerten**, **Eigenvektoren (Eigenrichtungen)** und **Invarianten** von Matrizen
Gegeben sei das folgende homogene Gleichungssystem (speziellen EWP).

$$(\mathbf{B}-\lambda\,\mathbf{I})\mathbf{z}=\mathbf{0}$$

Zuerst werden die Eigenwerte der Matrix berechnet, danach die zu diesen Eigenwerten gehörenden Eigenrichtungen (Anwendungen in der Technik sind z.B. die Berechnung der Hauptspannungen und ihrer Richtungen).

Die Eigenwerte ergeben sich aus $\det(\mathbf{B}-\lambda\,\mathbf{I})=\mathbf{0}=\det\begin{bmatrix} (1-\lambda) & 3 & 1 \\ 2 & (2-\lambda) & 1 \\ 3 & 1 & (2-\lambda) \end{bmatrix}$.

Dies führt auf die charakteristische Gleichung

$$\begin{aligned}
\mathbf{0} &= \det\begin{bmatrix} (1-\lambda) & 3 & 1 \\ 2 & (2-\lambda) & 1 \\ 3 & 1 & (2-\lambda) \end{bmatrix} \\
&= (1-\lambda)(2-\lambda)(2-\lambda)+9+2-(1-\lambda)-6(2-\lambda)-3(2-\lambda) \\
&= \lambda^3-5\lambda^2-2\lambda+4 \\
&= \lambda^3-I_1\lambda^2+I_2\lambda-I_3
\end{aligned}$$

mit den Invarianten der Matrix $I_1=sp(\mathbf{B})=5$, $I_2=\frac{1}{2}\left((sp\mathbf{B})^2-sp\left(\mathbf{B}^2\right)\right)=-2$, $I_3=\det\mathbf{B}=-4$.

Die Gleichung 3. Grades hat die Lösungen $\lambda_1 = 5{,}236$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 0{,}764$.
Berechnung des Eigenvektors (Eigenrichtung) zu λ_2. Das homogene Gleichungssystem kann gelöst werden, wenn eine Vektorkomponente vorgegeben wird.

$$\begin{bmatrix} 1-(-1) & 3 & 1 \\ 2 & 2-(-1) & 1 \\ 3 & 1 & 2-(-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{21} \\ z_{22} \\ z_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{21} \\ z_{22} \\ z_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Es wird gewählt $z_{21} = 1$, dann folgt $z_{22} = -0{,}375$, $z_{23} = -0{,}875$.
Der Eigenvektor $\mathbf{z}$ kann auf den Betrag 1 normiert werden.

$$\mathbf{z}_{normiert} = \frac{\mathbf{z}}{|\mathbf{z}|}, \quad |\mathbf{z}| = \sqrt{\mathbf{z} \cdot \mathbf{z}}, \quad |\mathbf{z}_2| = 1{,}3807$$

Die drei Eigenvektoren sind dann $\mathbf{z}_1 = \begin{bmatrix} 0{,}532 \\ 0{,}532 \\ 0{,}658 \end{bmatrix}$, $\mathbf{z}_2 = \begin{bmatrix} 0{,}724 \\ -0{,}272 \\ -0{,}634 \end{bmatrix}$, $\mathbf{z}_3 = \begin{bmatrix} -0{,}283 \\ -0{,}283 \\ 0{,}916 \end{bmatrix}$.

GAUSS-Algorithmus

Gegeben sei wiederum das **lineare Gleichungssystem** $\mathbf{B} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$, $\quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$.

$$1x + 3y + 1z = 2$$
$$2x + 2y + 1z = 1$$
$$3x + 1y + 2z = 3$$

Die quadratische Koeffizientenmatrix wird schrittweise in eine Dreiecksmatrix umgeformt.

	x	y	z	**rechte Seite**		
	1	3	1	2	1)	
Stufe 1	-1	-1	-0,5	-0,5	2) *(-0,5)	
	-1	-0,33333333	-0,66666667	-1	3) *(-0,3333)	
	1	3	1	2	1)	
neues System	0	2	0,5	1,5	2a)	1)+2)
	0	2,66666667	0,33333333	1	3a)	1)+3)
	1	3	1	2	1)	
Stufe 2	0	2	0,5	1,5	2a)	
	0	-2	-0,25	-0,75	3b)	3a)*(-0,75)
	1	3	1	2	1)	
neues System	0	2	0,5	1,5	2a)	
	0	0	0,25	0,75	3c)	2a)+3b)

Nun lässt sich zuerst z und dann durch Rückwärtseinsetzen y und x berechnen.
Die Ergebnisse sind $z = 3, y = 0, x = -1$ (wie schon oben gesehen).

Herleitung der **CRAMERschen Regel**

Vektorielle Darstellung eines linearen Gleichungssystems: $\mathbf{a}\cdot x+\mathbf{b}\cdot y+\mathbf{c}\cdot z=\mathbf{d}$
Wir multiplizieren mit den Vektoren $\mathbf{b}$ und $\mathbf{c}$.

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})x+\underbrace{(\mathbf{b}\times\mathbf{b})}_{=0,\text{ da Vektoren parallel}}y+(\mathbf{c}\times\mathbf{b})z=(\mathbf{d}\times\mathbf{b})$$

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})x+\underbrace{(\mathbf{c}\times\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})}_{=0,\text{ da }(\mathbf{c}\times\mathbf{b})\perp\mathbf{c}}z=(\mathbf{d}\times\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})$$

$$x=\frac{\mathbf{d}\times\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}}{\mathbf{a}\times\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}}=\frac{D_1}{D}$$

In Analogie gilt dies auch für y und z.

$\mathbf{a}\times\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}$ ist das Spatprodukt (gemischtes Vektorprodukt).

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}=\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}=D$$

Wenden wir dies nun auf ein Gleichungssystem an.

Gegeben sei wiederum das **lineare Gleichungssystem** $\mathbf{B}\cdot\mathbf{x}=\mathbf{b},\quad \mathbf{x}=\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}$.

$$\begin{aligned}1x+3y+1z&=2\\ 2x+2y+1z&=1\\ 3x+1y+2z&=3\end{aligned}$$

Es wird jeweils eine Spalte in der Determinante der Koeffizientenmatrix durch die rechte Seite des Gleichungssystem ersetzt.

$$D=\begin{vmatrix}1 & 3 & 1\\ 2 & 2 & 1\\ 3 & 1 & 2\end{vmatrix}=-4$$

$$D_1=\begin{vmatrix}2 & 3 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 3 & 1 & 2\end{vmatrix}=4$$

$$D_2=\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ 3 & 3 & 2\end{vmatrix}=0$$

$$D_3=\begin{vmatrix}1 & 3 & 2\\ 2 & 2 & 1\\ 3 & 1 & 3\end{vmatrix}=-12$$

$$x=\frac{D_1}{D}=-1,\quad y=\frac{D_2}{D}=0,\quad z=\frac{D_3}{D}=3$$

Lösen des Gleichungssystems mit Matrizenoperationen

$$\mathbf{B}\cdot\mathbf{x}=\mathbf{b}$$

$$\underbrace{\mathbf{B}^{-1}\cdot\mathbf{B}}_{\mathbf{I}}\cdot\mathbf{x}=\mathbf{x}=\mathbf{B}^{-1}\cdot\mathbf{b}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{5}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Die Multiplikation erfolgt zweckmäßig mit dem FALKschen Schema

$$\mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{x}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{5}{4} & \frac{-1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \end{array}$$

Das **Schema von FALK** dient der übersichtlichen Multiplikation von Vektoren und Matrizen. Es lässt sich hier leicht erkennen, ob die Multiplikation überhaupt möglich ist. Dazu muss die Spaltenanzahl des ersten Faktors mit der Zeilenanzahl des zweiten Faktors übereinstimmen. Die zu multiplizierenden Faktoren müssen also nicht quadratische Form haben.

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{a}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1+6+3=10 \\ 2+4+3=9 \\ 3+2+6=11 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{B}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} & [\mathit{nicht\ möglich}] \end{array}$$

$$\mathbf{a}^T \cdot \mathbf{B}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 14 & 10 & 9 \end{bmatrix} \end{array}$$

Der Vektor ist ein Spezialfall einer Matrix.

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 6 \\ 6 & 3 & 9 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 13 & 11 & 9 \\ 26 & 22 & 18 \\ 39 & 33 & 27 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 6 \\ 6 & 3 & 9 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 20 & 10 & 30 \\ 18 & 9 & 27 \\ 22 & 11 & 33 \end{bmatrix} \end{array}$$

also: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$

spezielle Matrizen

orthogonale Matrix, hat die Determinante 1

Transformation eines Koordinatensystems $\underbrace{\mathbf{u}}_{neues\ KS} = \underbrace{\mathbf{A}}_{Transformationsmatrix} \cdot \underbrace{\mathbf{x}}_{altes\ KS}$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) & 0 \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad oder \qquad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{bmatrix}, \qquad \det \mathbf{A} = 1$$

Die Matrix ist regulär (Determinante $\neq$ 0) und orthogonal.

Die Matrix beschreibt die Drehung eines Koordinatensystems um die Achse 3.