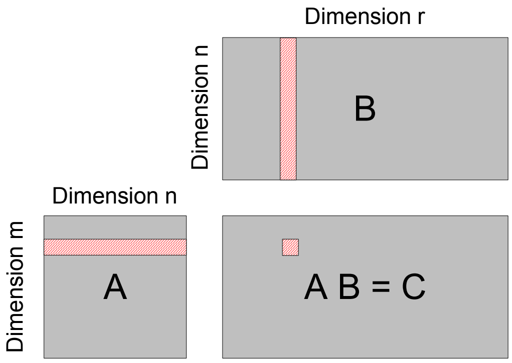
Multiplikation Matrix mal Matrix (Matrix mal Vektor, Vektor mal Matrix)

Matrizen lassen sich nur mit einander multiplizieren, wenn die Dimensionen der Einzelmatrizen zueinander kompatibel sind. Jedes Element der Ergebnismatrix ist das Skalarprodukt der entsprechenden Zeile und Spalte der Einzelmatrizen. Kurz gesagt gilt: Matrix **A** (Format m*n) mal Matrix **B** (Format n*r) ergibt Matrix **C** (Format m*r). Die Matrizenmultiplikation erfolgt zweckmäßigerweise übersichtlich nach dem FALKschen Schema.



Die Matrixelemente berechnen sich durch Multiplikation Zeile von **A** mal Spalte von **B** gleich Element von **C.**

$$c_{mr} = \sum_{i=1}^{n} a_{mi} * b_{ir}$$

Es gelten folgende Rechenregeln für kompatible Matrizen:

	$(\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2)\,\mathbf{B}$	$= \mathbf{A}_1\,\mathbf{B} + \mathbf{A}_2\,\mathbf{B}$		
	$\mathbf{A}\,(\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2)$	$= \mathbf{A}\,\mathbf{B}_1 + \mathbf{A}\,\mathbf{B}_2$		
	$\alpha\,(\mathbf{A}\,\mathbf{B})$	$= (\alpha\,\mathbf{A})\,\mathbf{B}$	$= \mathbf{A}\,(\alpha\,\mathbf{B})$	
	$\mathbf{A}\,(\mathbf{B}\,\mathbf{C})$	$= (\mathbf{A}\,\mathbf{B})\,\mathbf{C}$		
	$\mathbf{E}\,\mathbf{A}$	$= \mathbf{A}\,\mathbf{E}$	$= \mathbf{A}$	hier ist **E** die Einheitsmatrix
aber:	$\mathbf{A}\,\mathbf{B}$	$\neq \mathbf{B}\,\mathbf{A}$		

Beispiel:

	A B		7	10
			8	11
			9	12
1	2	3	50	68
4	5	6	122	167

	B A	1	2	3
		4	5	6
7	10	47	64	81
8	11	52	71	90
9	12	57	78	99

Berechnung der Determinante einer Matrix

Determinanten lassen sich nur für quadratische Matrizen berechnen. Ist die Determinante einer Matrix **A** = 0, so ist die Matrix singulär. Bei det$|\mathbf{A}| \neq 0$ ist die Matrix regulär. Der Wert der Determinante ist ein Skalar.

$$D = \det \mathbf{A} = \det \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Die Berechnung erfolgt für Determinanten 2. und 3. Ordnung nach der Regel: **Summe der Produkte der Hauptdiagonalen minus Summe der Produkte der Nebendiagonalen.** Determinanten von Matrizen höherer Ordnung müssen nach dem Entwicklungssatz berechnet werden. Die Determinante kann nach den Elementen einer beliebigen Spalte oder Zeile der Matrix entwickelt werden.

$D = a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + ... + a_{in} A_{in}$ Entwicklung nach der i-ten Zeile
oder $D = a_{1k} A_{1k} + a_{2k} A_{2k} + ... + a_{nk} A_{nk}$ Entwicklung nach der k-ten Spalte

Hierbei sind die a_{ik} die entsprechenden Matrizenelemente und die A_{ik} die Adjunkten von $|\mathbf{A}|$ sind. Die Adjunkte (Kofaktor) berechnet sich als $A_{ik} = (-1)^{i+k}\ \alpha_{ik}$. α_{ik} ist die zum Element a_{ik} gehörende Unterdeterminante (n-1)ter Ordnung.

Vorzeichenschema für die Unterdeterminanten:

$$(-1)^{i+k} = \begin{vmatrix} + & - & + & - & + \\ - & + & - & + & - \\ + & - & + & - & + \\ - & + & - & + & - \\ + & - & + & - & + \end{vmatrix} 1$$

Beispiel für eine Determinante 3. Ordnung:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$D = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{31}a_{23} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{31}a_{22}$$

Rechenregeln für Determinanten:

$|\mathbf{A}| = |\mathbf{A}^T|$
$|\mathbf{A\,B}| \neq |\mathbf{B\,A}| \neq |\mathbf{A}|\,|\mathbf{B}|$

<u>Beispiel:</u>

Berechnen wir die Determinanten der Ergebnismatrizen **AB** und **BA** aus dem vorangegangenen Beispiel.

det $|\mathbf{AB}| = 50\ 167 - 68\ 122 = \underline{54}$
det $|\mathbf{BA}| = 47\begin{vmatrix} 71 & 90 \\ 78 & 99 \end{vmatrix} - 64\begin{vmatrix} 52 & 90 \\ 57 & 95 \end{vmatrix} + 81\begin{vmatrix} 52 & 71 \\ 57 & 78 \end{vmatrix} = 423 + 12160 + 729 = \underline{13312}$, hier wurde nach der ersten Zeile der Matrix entwickelt. Für dreireihige Matrizen ist auch die Lösung nach der SARRUSschen Regel möglich.

Invertierung einer Matrix

Voraussetzung ist, dass die betrachtete Matrix quadratisch ist, also m = n.
Eine n*n Matrix **A** heißt invertierbar, wenn es eine n*n Matrix **B** gibt, so dass gilt **A B** = **B A** = **E**. In diesem Fall ist die Matrix **B** eindeutig bestimmt, sie wird meist mit $\mathbf{A}^{-1}$ bezeichnet und heißt inverse Matrix oder die **I**nverse von **A**.

Rechenregeln für inverse Matrizen:

$(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$
$(\mathbf{A\,B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\,\mathbf{A}^{-1}$
$(\mathbf{A}^T)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^T$

Berechnung der Inversen:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}^T$$

wobei die A_{ij} die Adjunkten von $|\mathbf{A}|$ sind. Die Adjunkte (Kofaktor) berechnet sich als $A_{ik} = (-1)^{i+k}\ \alpha_{ik}$. α_{ik} ist die zum Element a_{ik} gehörende Unterdeterminante (n-1)ter Ordnung. Regel: **A** invertierbar = **A** regulär (det $\mathbf{A} \neq 0$)

Beispiel:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$ Matrix

$$|A| = 3$$ Determinate

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -0.333 & -1.333 & 3 \\ 0.333 & 0.333 & -1 \end{pmatrix}$$ inverse Matrix

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & -5 \end{bmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0.5 & 1 & -0.5 \\ 5 & -4 & -3 & 2 \\ 2 & -1.5 & -1 & 0.5 \end{bmatrix} \qquad |A| = -2$$

zur Kontrolle: es muß gelten **AA^{-1}=E**

$$A \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1.776 \cdot 10^{-15} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Transponieren einer Matrix

Jeder m*n Matrix **A** zugeordnet ist die transponierte Matrix A^T, deren i-te Zeile aus den Elementen der i-ten Spalte der Matrix **A** besteht. Die Transponierte einer n*m Matrix ist eine m*n Matrix.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

Es gelten folgende Rechenregeln:

$(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$
$(\alpha\ \mathbf{A})^T = \alpha\ \mathbf{A}^T$
$(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$

$$(\mathbf{A}\,\mathbf{B})^T = \mathbf{B}^T\,\mathbf{A}^T$$

Eine Matrix heißt symmetrisch, wenn gilt $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$
Eine Matrix heißt schiefsymmetrisch, wenn gilt $\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}$

Lösung linearer Gleichungssysteme

Eine der häufigsten Anwendungen der Matrizenrechnung ist die Lösung linearer Gleichungssysteme, die sich in der Form $\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ darstellen lassen. $\mathbf{A}$ ist dabei die Koeffizientenmatrix, $\mathbf{x}$ der Spaltenvektor der Unbekannten und $\mathbf{b}$ die Spaltenmatrix der rechten Seiten. Nach den Rechenregeln für Matrizen ergibt sich:

$$\mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{b}$$

wegen $\mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{A} = \mathbf{E}$ und $\mathbf{E}\,\mathbf{x} = \mathbf{E}$

folgt $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{b}$