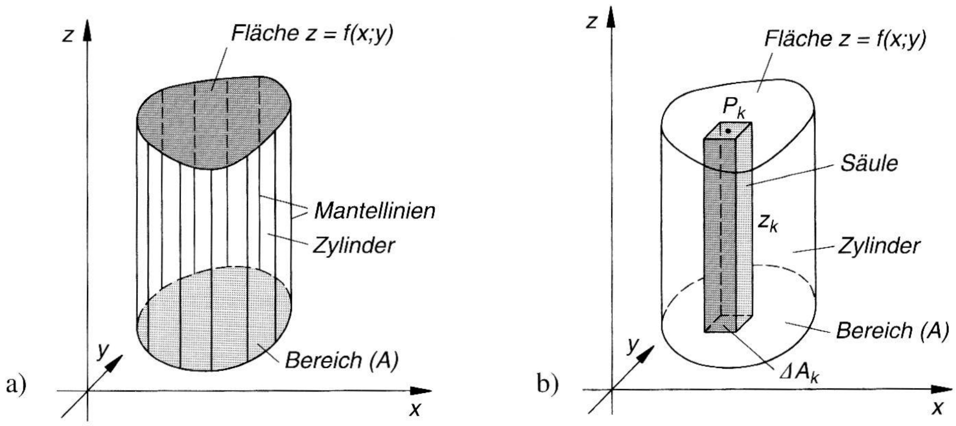
3 Mehrfachintegrale

3.1 Doppelintegrale

3.1.1 Definition eines Doppelintegrals

Das Doppelintegral $\iint\limits_{(A)} f(x;\, y)\, dA$ läßt sich in anschaulicher Weise als das *Volumen* des in Bild a) skizzierten *zylindrischen* Körpers einführen, sofern $f(x;\, y) \geq 0$ ist. Der *„Boden"* des Zylinders besteht aus dem Bereich (A) der x, y-Ebene, sein „Deckel" ist die Bildfläche der Funktion $z = f(x;\, y)$.



Wir zerlegen zunächst den Zylinder in n *Röhren* und ersetzen dann jede Röhre in der aus Bild b) ersichtlichen Weise durch eine *quaderförmige* Säule vom Volumen $\Delta V_k = z_k \cdot \Delta A_k = f(x_k;\, y_k)\, \Delta A_k$ mit $k = 1, 2, \ldots, n$ und *summieren* schließlich über alle Röhren (Säulen). Für das *Zylindervolumen* V *erhält man so den Näherungswert*

$$V \approx \sum_{k=1}^{n} \Delta V_k = \sum_{k=1}^{n} f(x_k;\, y_k)\, \Delta A_k$$

Beim Grenzübergang $n \to \infty$ (und somit $\Delta A_k \to 0$) strebt diese Summe gegen einen *Grenzwert*, der als *2-dimensionales Bereichsintegral* von $f(x;\, y)$ über (A) oder kurz als *Doppelintegral* bezeichnet wird und geometrisch als *Zylindervolumen* interpretiert werden darf. Symbolische Schreibweise:

$$\iint\limits_{(A)} f(x;\, y)\, dA = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k;\, y_k)\, \Delta A_k$$

Bezeichnungen

x, y:	Integrationsvariable
$f(x; y)$:	Integrandfunktion (kurz: Integrand)
dA:	Flächendifferential oder Flächenelement
(A):	Flächenhafter Integrationsbereich

3.1.2 Berechnung eines Doppelintegrals in kartesischen Koordinaten

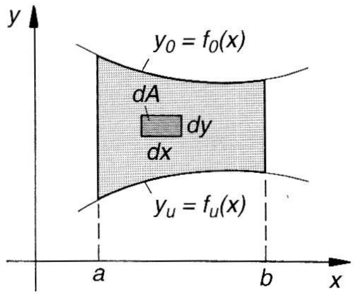
Wir legen den folgenden *kartesischen Normalbereich* (A) zugrunde:

$y_u = f_u(x)$: *Untere* Randkurve

$y_o = f_o(x)$: *Obere* Randkurve

$dA = dx\,dy = dy\,dx$

$$(A): \quad \left\{ \begin{array}{c} f_u(x) \le y \le f_o(x) \\ a \le x \le b \end{array} \right\}$$



Das Doppelintegral $\iint\limits_{(A)} f(x; y)\,dA$ läßt sich dann schrittweise durch *zwei* nacheinander auszuführende *gewöhnliche* Integrationen berechnen:

$$\iint\limits_{(A)} f(x; y)\,dA = \underbrace{\int\limits_{x=a}^{b} \underbrace{\int\limits_{y=f_u(x)}^{f_o(x)} f(x; y)\,dy}_{\text{Inneres Integral}}\,dx}_{\text{Äußeres Integral}}$$

1. Innere Integration (nach der Variablen y)

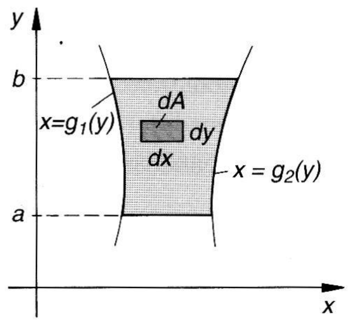
Die Variable x wird zunächst als *Parameter* festgehalten und die Funktion $f(x; y)$ unter Verwendung der für *gewöhnliche* Integrale gültigen Regeln *nach der Variablen* y integriert. In die ermittelte Stammfunktion setzt man dann für y die (variablen) Integrationsgrenzen $f_o(x)$ und $f_u(x)$ ein und bildet die entsprechende Differenz.

2. Äußere Integration (nach der Variablen x)

Die jetzt nur noch von der Variablen x abhängige Funktion wird in den Grenzen von $x = a$ bis $x = b$ integriert (*gewöhnliche* Integration nach x).

Allgemeine Regel: Zunächst wird über die Variable mit *veränderlichen* Grenzen, dann über die Variable mit *festen* Grenzen integriert.

Bei einer Integration über den *kartesischen Normalbereich*



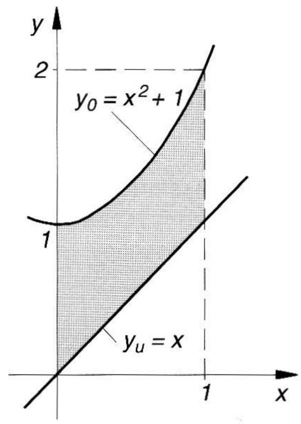
$$x = g_1(y)\text{: Linke Randkurve}$$
$$x = g_2(y)\text{: Rechte Randkurve}$$
$$(A): \left\{ \begin{array}{c} g_1(y) \le x \le g_2(y) \\ a \le y \le b \end{array} \right\}$$

gilt demnach:

$$\iint_{(A)} f(x;y)\,dA = \int_{y=a}^{b} \int_{x=g_1(y)}^{g_2(y)} f(x;y)\,dx\,dy$$

■ **Beispiel**

$$\int_{x=0}^{1} \int_{y=x}^{x^2+1} x^2 y\,dy\,dx = ?$$



Innere Integration nach der Variablen y:

$$\int_{y=x}^{x^2+1} x^2 y\,dy = x^2 \cdot \int_{y=x}^{x^2+1} y\,dy =$$
$$= \frac{1}{2}\,x^2\left[y^2\right]_{y=x}^{x^2+1} =$$
$$= \frac{1}{2}\,x^2\left[(x^2+1)^2 - x^2\right] =$$
$$= \frac{1}{2}\,(x^6 + x^4 + x^2)$$

Äußere Integration nach der Variablen x:

$$\frac{1}{2} \cdot \int_{x=0}^{1} (x^6 + x^4 + x^2)\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{71}{210}$$

Ergebnis: $\int_{x=0}^{1} \int_{y=x}^{x^2+1} x^2 y\,dy\,dx = \frac{71}{210}$ ■

3.1.3 Berechnung eines Doppelintegrals in Polarkoordinaten

Wir legen den folgenden *Normalbereich* in *Polarkoordinaten* zugrunde:

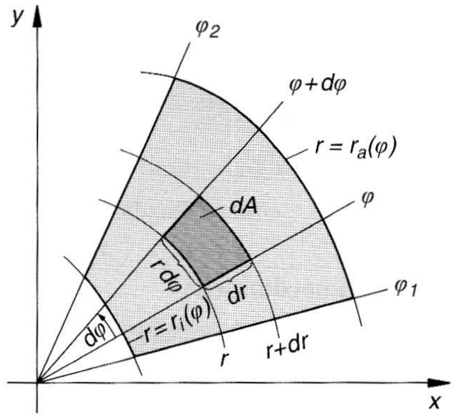
$r = r_i(\varphi)$: *Innere* Randkurve

$r = r_a(\varphi)$: *Äußere* Randkurve

$dA = r\,dr\,d\varphi$

$$(A): \quad \left\{ \begin{array}{c} r_i(\varphi) \le r \le r_a(\varphi) \\ \varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2 \end{array} \right\}$$

$x = r \cdot \cos\varphi\,, \quad y = r \cdot \sin\varphi$



Das Doppelintegral $\iint\limits_{(A)} f(x;\,y)\,dA$ läßt sich dann schrittweise durch *zwei* nacheinander auszuführende *gewöhnliche* Integrationen berechnen:

$$\iint\limits_{(A)} f(x;\,y)\,dA = \underbrace{\int\limits_{\varphi=\varphi_1}^{\varphi_2} \underbrace{\int\limits_{r=r_i(\varphi)}^{r_a(\varphi)} f(r\cdot\cos\varphi;\, r\cdot\sin\varphi)\cdot r\,dr}_{\text{Inneres Integral}}\,d\varphi}_{\text{Äußeres Integral}}$$

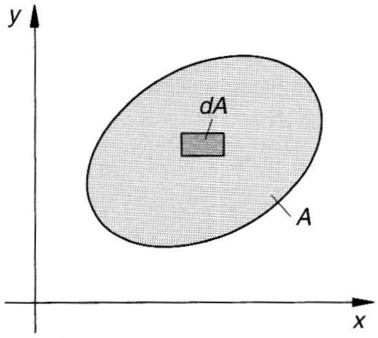
Zunächst wird dabei nach der Variablen r integriert, wobei die Winkelkoordinate φ als *Parameter* festgehalten wird (*innere* Integration). Dann folgt die *äußere* Integration nach der Variablen φ.

3.1.4 Anwendungen

3.1.4.1 Flächeninhalt

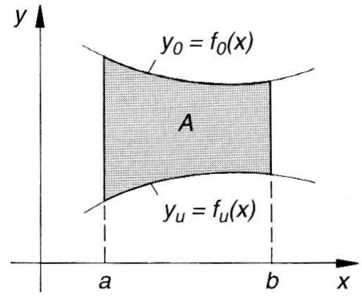
Definitionsformel

$$A = \iint\limits_{(A)} dA$$



In kartesischen Koordinaten

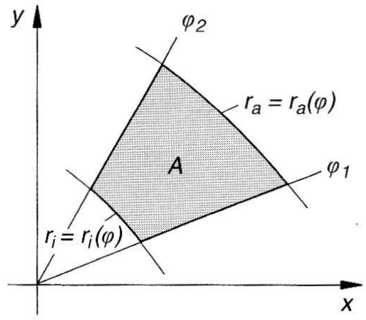
$$A = \int_{x=a}^{b} \int_{y=f_u(x)}^{f_o(x)} dy\,dx$$



$y_o = f_o(x)$: *Obere* Randkurve
$y_u = f_u(x)$: *Untere* Randkurve

In Polarkoordinaten

$$A = \int_{\varphi=\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{r=r_i(\varphi)}^{r_a(\varphi)} r\,dr\,d\varphi$$



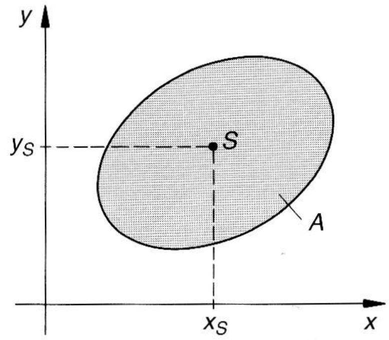
$r_a = r_a(\varphi)$: *Äußere* Randkurve
$r_i = r_i(\varphi)$: *Innere* Randkurve

3.1.4.2 Schwerpunkt einer homogenen ebenen Fläche

Definitionsformeln

$$x_S = \frac{1}{A} \cdot \iint_{(A)} x\,dA$$

$$y_S = \frac{1}{A} \cdot \iint_{(A)} y\,dA$$

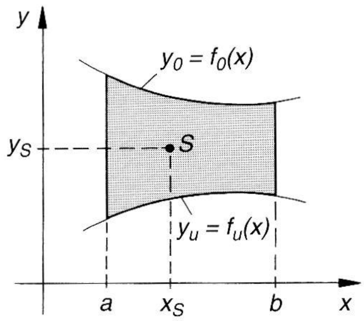


A: Flächeninhalt (siehe IX.3.1.4.1)

In kartesischen Koordinaten

$$x_S = \frac{1}{A} \cdot \int_{x=a}^{b} \int_{y=f_u(x)}^{f_o(x)} x\,dy\,dx$$

$$y_S = \frac{1}{A} \cdot \int_{x=a}^{b} \int_{y=f_u(x)}^{f_o(x)} y\,dy\,dx$$

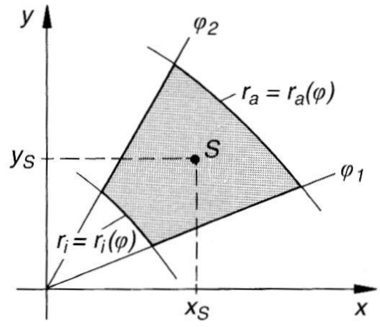


$y_o = f_o(x)$: *Obere* Randkurve
$y_u = f_u(x)$: *Untere* Randkurve
A: Flächeninhalt (siehe IX.3.1.4.1)

In Polarkoordinaten

$$x_S = \frac{1}{A} \cdot \int_{\varphi=\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{r=r_i(\varphi)}^{r_a(\varphi)} r^2 \cdot \cos\varphi \, d\, r \, d\varphi$$

$$y_S = \frac{1}{A} \cdot \int_{\varphi=\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{r=r_i(\varphi)}^{r_a(\varphi)} r^2 \cdot \sin\varphi \, d\, r \, d\varphi$$



$r_a = r_a(\varphi)$: *Äußere* Randkurve
$r_i = r_i(\varphi)$: *Innere* Randkurve
A: Flächeninhalt (siehe IX.3.1.4.1)

Teilschwerpunktsatz: Siehe V.5.5

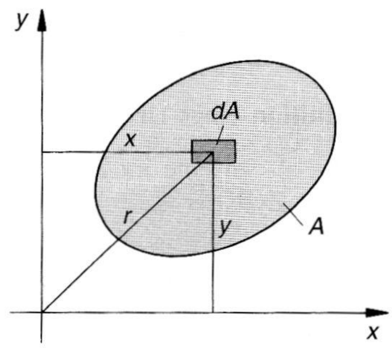
3.1.4.3 Flächenträgheitsmomente (Flächenmomente 2. Grades)

Definitionsformeln

$$I_x = \iint_{(A)} y^2 \, dA, \quad I_y = \iint_{(A)} x^2 \, dA$$

$$I_p = \iint_{(A)} r^2 \, dA$$

$$I_p = I_x + I_y$$

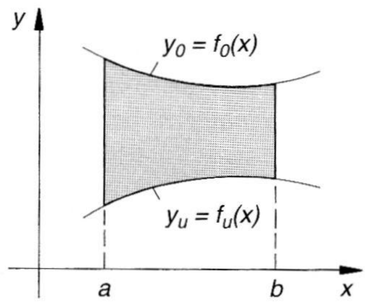


In kartesischen Koordinaten

$$I_x = \int_{x=a}^{b} \int_{y=f_u(x)}^{f_o(x)} y^2 \, d\, y \, d\, x$$

$$I_y = \int_{x=a}^{b} \int_{y=f_u(x)}^{f_o(x)} x^2 \, d\, y \, d\, x$$

$$I_p = \int_{x=a}^{b} \int_{y=f_u(x)}^{f_o(x)} (x^2 + y^2) \, d\, y \, d\, x$$



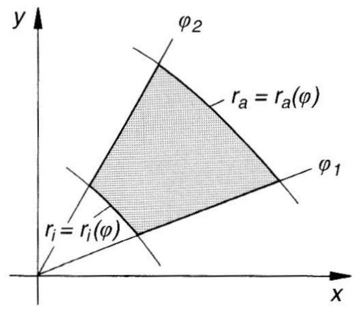
$y_o = f_o(x)$: *Obere* Randkurve
$y_u = f_u(x)$: *Untere* Randkurve

In Polarkoordinaten

$$I_x = \int_{\varphi=\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{r=r_i(\varphi)}^{r_a(\varphi)} r^3 \cdot \sin^2\varphi \, dr \, d\varphi$$

$$I_y = \int_{\varphi=\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{r=r_i(\varphi)}^{r_a(\varphi)} r^3 \cdot \cos^2\varphi \, dr \, d\varphi$$

$$I_p = \int_{\varphi=\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{r=r_i(\varphi)}^{r_a(\varphi)} r^3 \, dr \, d\varphi$$



$r_a = r_a(\varphi)$: *Äußere* Randkurve
$r_i = r_i(\varphi)$: *Innere* Randkurve

Satz von Steiner: Siehe V.5.6

3.2 Dreifachintegrale

3.2.1 Definition eines Dreifachintegrals

$u = f(x; y; z)$ sei eine im Zylinderbereich (V) definierte und dort stetige Funktion. Wir zerlegen den Zylinder zunächst in n räumliche Teilbereiche ΔV_k, wählen in jedem Teilbereich einen beliebigen Punkt $P_k = (x_k; y_k; z_k)$, bilden das Produkt $f(x_k; y_k; z_k) \Delta V_k$ und summieren schließlich über alle Teilbereiche ($k = 1, 2, \ldots, n$; siehe hierzu das obere Bild auf Seite 251):

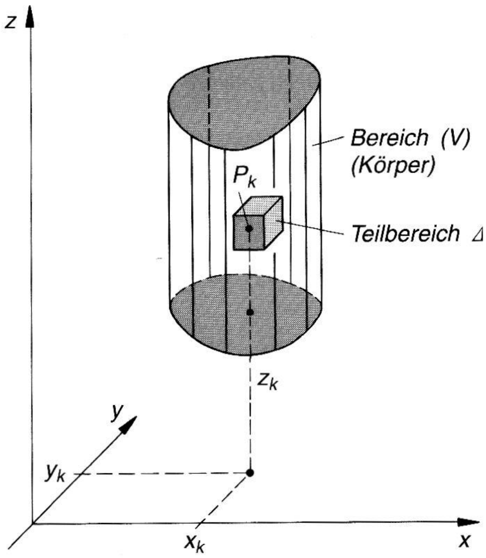
$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k; y_k; z_k) \Delta V_k$$

Beim *Grenzübergang* $n \to \infty$ (und zugleich $\Delta V_k \to 0$) strebt diese Summe gegen einen *Grenzwert*, der als *3-dimensionales Bereichsintegral* von $f(x; y; z)$ über (V) oder kurz als *Dreifachintegral* bezeichnet wird. Symbolische Schreibweise:

$$\iiint_{(V)} f(x; y; z) \, dV = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k; y_k; z_k) \Delta V_k$$

Bezeichnungen

x, y, z:	Integrationsvariable
$f(x; y; z)$:	Integrandfunktion (kurz: Integrand)
dV:	Volumendifferential oder Volumenelement
(V):	Räumlicher Integrationsbereich



3.2.2 Berechnung eines Dreifachintegrals in kartesischen Koordinaten

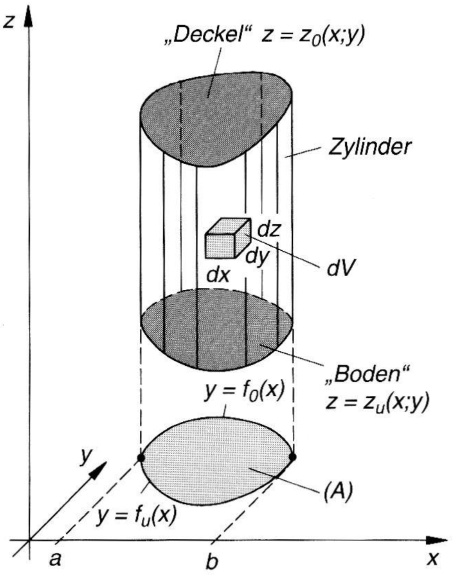
Wir legen den folgenden *kartesischen Normalbereich* zugrunde:

$z = z_u(x; y)$: „Bodenfläche“

$z = z_o(x; y)$: „Deckelfläche“

$dV = dx\,dy\,dz = dz\,dy\,dx$

$$(V): \left\{ \begin{array}{c} z_u(x; y) \le z \le z_o(x; y) \\ f_u(x) \le y \le f_o(x) \\ a \le x \le b \end{array} \right\}$$



Das Dreifachintegral $\iiint\limits_{(V)} f(x;\, y;\, z)\, dV$ läßt sich dann schrittweise durch *drei* nacheinander auszuführende *gewöhnliche* Integrationen berechnen:

$$\iiint\limits_{(V)} f(x;\, y;\, z)\, dV = \int\limits_{x=a}^{b} \int\limits_{y=f_u(x)}^{f_o(x)} \int\limits_{z=z_u(x;\,y)}^{z_o(x;\,y)} f(x;\, y;\, z)\, dz\, dy\, dx$$

1. Integration

2. Integration

3. Integration

Es wird in der Reihenfolge z, y, x integriert. Bei einer *Abänderung* dieser Integrationsreihenfolge müssen die Integrationsgrenzen jeweils *neu* bestimmt werden. Zuletzt wird dabei stets über die Variable mit *festen* Genzen integriert.

■ **Beispiel**

$$\int\limits_{x=1}^{2} \int\limits_{y=0}^{x} \int\limits_{z=0}^{x+y} (x-y)\, z\, dz\, dy\, dx = ?$$

1. Integrationsschritt (Integration nach der Variablen z):

$$\int\limits_{z=0}^{x+y} (x-y)\, z\, dz = (x-y) \cdot \int\limits_{z=0}^{x+y} z\, dz = \frac{1}{2}\,(x-y)\,\left[z^2\right]_{z=0}^{x+y} = \frac{1}{2}\,(x-y)\,(x+y)^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\,(x^3 + x^2 y - x y^2 - y^3)$$

2. Integrationsschritt (Integration nach der Variablen y):

$$\int\limits_{y=0}^{x} \frac{1}{2}\,(x^3 + x^2 y - x y^2 - y^3)\, dy = \frac{1}{2}\left[x^3 y + \frac{1}{2}\, x^2 y^2 - \frac{1}{3}\, x y^3 - \frac{1}{4}\, y^4\right]_{y=0}^{x} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(x^4 + \frac{1}{2}\, x^4 - \frac{1}{3}\, x^4 - \frac{1}{4}\, x^4\right) = \frac{11}{24}\, x^4$$

3. Integrationsschritt (Integration nach der Variablen x):

$$\int\limits_{x=1}^{2} \frac{11}{24}\, x^4\, dx = \frac{11}{120}\left[x^5\right]_1^2 = \frac{341}{120}$$

Ergebnis: $\displaystyle\int\limits_{x=1}^{2} \int\limits_{y=0}^{x} \int\limits_{z=0}^{x+y} (x-y)\, z\, dz\, dy\, dx = \frac{341}{120}$ ■

3.2.3 Berechnung eines Dreifachintegrals in Zylinderkoordinaten

Hinweis: Die Zylinderkoordinate ϱ (senkrechter Abstand von der z-Achse, siehe I.9.2.2 und XIII.6.2) wird hier mit r bezeichnet, um Verwechslungen mit der Dichte ϱ zu vermeiden.

Beim Übergang von den *kartesischen* Raumkoordinaten $(x; y; z)$ zu den *Zylinderkoordinaten* $(r; \varphi; z)$ gelten die *Transformationsgleichungen*

$$x = r \cdot \cos \varphi, \quad y = r \cdot \sin \varphi, \quad z = z, \quad dV = r \, dz \, dr \, d\varphi$$

(Zylinderkoordinaten: siehe I.9.2.2 und XIII.6.2). Ein Dreifachintegral $\iiint\limits_{(V)} f(x; y; z) \, dV$ transformiert sich dabei wie folgt:

$$\iiint\limits_{(V)} f(x; y; z) \, dV = \iiint\limits_{(V)} f(r \cdot \cos \varphi; r \cdot \sin \varphi; z) \cdot r \, dz \, dr \, d\varphi$$

Die Integration erfolgt dabei in *drei* nacheinander auszuführenden *gewöhnlichen* Integrationsschritten, wobei zunächst nach z, dann nach r und schließlich nach φ integriert wird. Bei einer *Abänderung* der Integrationsreihenfolge müssen die (in *Zylinderkoordinaten* ausgedrückten) Integrationsgrenzen *neu* bestimmt werden.

3.2.4 Berechnung eines Dreifachintegrals in Kugelkoordinaten

Beim Übergang von den kartesischen Raumkoordinaten $(x; y; z)$ zu den *Kugelkoordinaten* $(r; \vartheta; \varphi)$ gelten die Transformationsgleichungen

$$x = r \cdot \sin \vartheta \cdot \cos \varphi, \quad y = r \cdot \sin \vartheta \cdot \sin \varphi, \quad z = r \cdot \cos \vartheta$$
$$dV = r^2 \cdot \sin \vartheta \cdot dr \, d\vartheta \, d\varphi$$

(Kugelkoordinaten: siehe I.9.2.4 und XIII.6.3). Ein Dreifachintegral $\iiint\limits_{(V)} f(x; y; z) \, dV$ transformiert sich dabei wie folgt:

$$\iiint\limits_{(V)} f(x; y; z) \, dV = \iiint\limits_{(V)} f(r \cdot \sin \vartheta \cdot \cos \varphi; r \cdot \sin \vartheta \cdot \sin \varphi; r \cdot \cos \vartheta) \cdot r^2 \cdot \sin \vartheta \, dr \, d\vartheta \, d\varphi$$

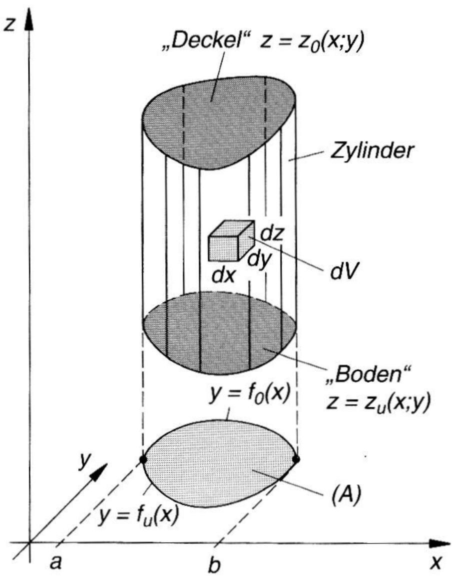
Die Integration erfolgt in *drei* nacheinander auszuführenden gewöhnlichen Integrationsschritten, wobei zunächst nach r, dann nach ϑ und schließlich nach φ integriert wird. Bei einer Änderung der Integrationsreihenfolge müssen die (in Kugelkoordinaten ausgedrückten) Integrationsgrenzen neu bestimmt werden.

3.2.5 Anwendungen

3.2.5.1 Volumen eines zylindrischen Körpers

Definitionsformel

$$V = \iiint\limits_{(V)} dV$$



In kartesischen Koordinaten

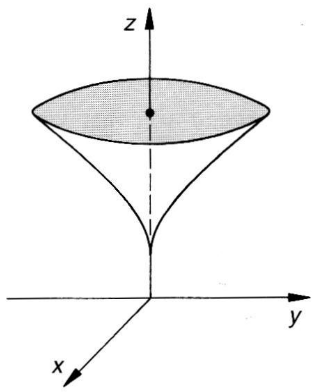
$$V = \int\limits_{x=a}^{b} \int\limits_{y=f_u(x)}^{f_o(x)} \int\limits_{z=z_u(x;\,y)}^{z_o(x;\,y)} dz\,dy\,dx$$

$z = z_o(x;\,y)$: „Deckelfläche“

$z = z_u(x;\,y)$: „Bodenfläche“

Rotationskörper

Rotationsachse: z-Achse



$$V = \iiint\limits_{(V)} r\,dz\,dr\,d\varphi$$

$r,\ \varphi,\ z$: Zylinderkoordinaten (siehe I.9.2.2 und XIII.6.2)

3.2.5.2 Schwerpunkt eines homogenen Körpers

Definitionsformeln

$$x_S = \frac{1}{V} \cdot \iiint\limits_{(V)} x\,dV\,, \qquad y_S = \frac{1}{V} \cdot \iiint\limits_{(V)} y\,dV\,, \qquad z_S = \frac{1}{V} \cdot \iiint\limits_{(V)} z\,dV$$

V: Volumen (siehe IX.3.2.5.1)

Bild siehe Seite 255 oben

In kartesischen Koordinaten

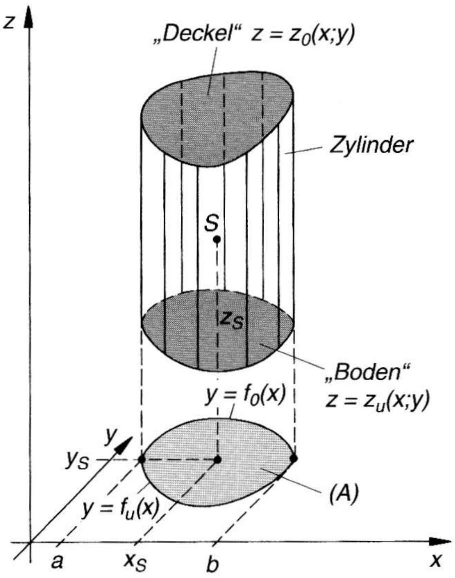
$$x_S = \frac{1}{V} \cdot \int\limits_{x=a}^{b} \int\limits_{y=f_u(x)}^{f_o(x)} \int\limits_{z=z_u(x;y)}^{z_o(x;y)} x\,dz\,dy\,dx$$

$$y_S = \frac{1}{V} \cdot \int\limits_{x=a}^{b} \int\limits_{y=f_u(x)}^{f_o(x)} \int\limits_{z=z_u(x;y)}^{z_o(x;y)} y\,dz\,dy\,dx$$

$$z_S = \frac{1}{V} \cdot \int\limits_{x=a}^{b} \int\limits_{y=f_u(x)}^{f_o(x)} \int\limits_{z=z_u(x;y)}^{z_o(x;y)} z\,dz\,dy\,dx$$

$z = z_o(x;\, y)$: „Deckelfläche“

$z = z_u(x;\, y)$: „Bodenfläche“



Rotationskörper

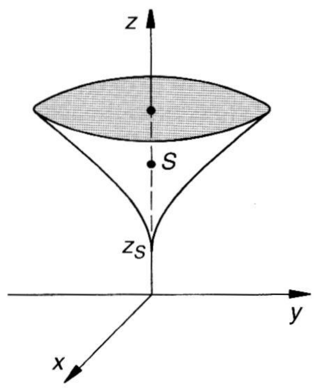
Rotationsachse: z-Achse

$$x_S = 0, \quad y_S = 0$$

$$z_S = \frac{1}{V} \cdot \iiint\limits_{(V)} z\,r\,dz\,dr\,d\varphi$$

V: Rotationsvolumen (siehe IX.3.2.5.1)

r, φ, z: Zylinderkoordinaten (siehe I.9.2.2 und XIII.6.2)



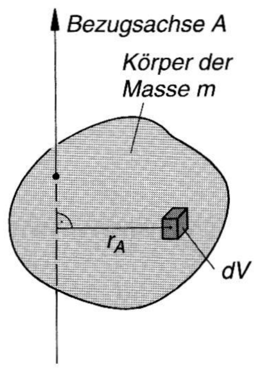
3.2.5.3 Massenträgheitsmoment eines homogenen Körpers

Definitionsformel

$$J = \varrho \cdot \iiint\limits_{(V)} r_A^2\,dV$$

ϱ: Konstante Dichte des Körpers

r_A: Senkrechter Abstand des Volumenelementes dV von der Bezugsachse



In kartesischen Koordinaten

Bezugsachse: z-Achse

$$J = \varrho \cdot \int_{x=a}^{b} \int_{y=f_u(x)}^{f_o(x)} \int_{z=z_u(x;y)}^{z_o(x;y)} (x^2 + y^2)\, dz\, dy\, dx$$

$z = z_o(x;\, y)$: „Deckelfläche“

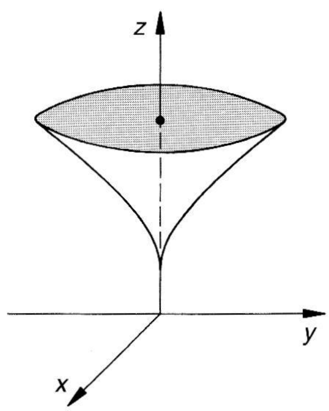
$z = z_u(x;\, y)$: „Bodenfläche“

ϱ: Konstante Dichte des Körpers

Rotationskörper

Rotations- und Bezugsachse: z-Achse

$$J_z = \varrho \cdot \iiint_{(V)} r^3\, dz\, dr\, d\varphi$$



ϱ: Konstante Dichte des Körpers

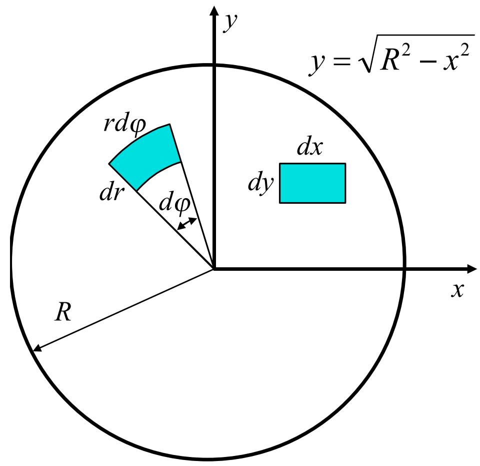
$r,\ \varphi,\ z$: Zylinderkoordinaten (siehe I.9.2.2 und XIII.6.2)

Satz von Steiner

Siehe V.5.11

Beispielaufgaben zu Mehrfachintegralen

Integration der Kreisfläche in verschiedenen Koordinatensystemen



$$A=\int dA=\iint dx\,dy=\iint r\,dr\,d\varphi$$

Wegen der Symmetrie kann braucht nur ein Teil des Kreises berechnet werden.

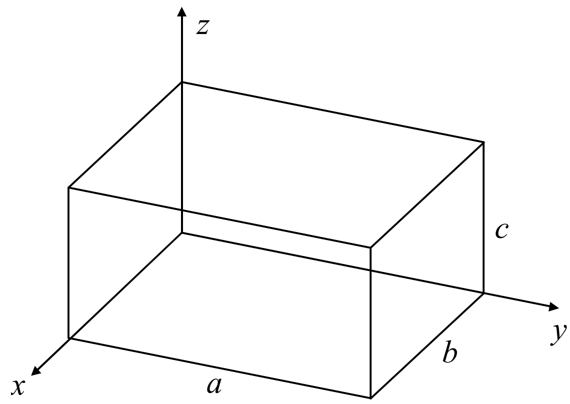
$$\begin{aligned}A&=4\int_{x=0}^{R}\int_{y=0}^{\sqrt{R^2-x^2}}dx\,dy\\&=4\int_{x=0}^{R}\sqrt{R^2-x^2}\,dx\\&=4\frac{1}{2}\left[x\sqrt{R^2-x^2}+R^2\,arcsin\left(\frac{x}{R}\right)\right]_0^R\\&=\pi\,R^2\end{aligned}$$

oder

$$A=\int_{r=0}^{R}\int_{\varphi=0}^{2\pi}r\,dr\,d\varphi=2\pi\int_0^R r\,dr=\pi\,R^2$$

Eine geeignete Wahl des Koordinatensystems kann den Rechengang deutlich vereinfachen.

Bestimmung der Masse eines Quaders mit räumlich veränderlicher Dichte



$$\rho(z)=1\frac{kg}{m^3}+z\frac{kg}{m^4}$$

$$\begin{aligned}m&=\int dm=\int\rho\,dV=\iiint_{(V)}\rho\,dx\,dy\,dz\\&=\int_{x=0}^{b}\int_{y=0}^{a}\int_{z=0}^{c}(1+z)dz\,dy\,dx\\&=\int_{x=0}^{b}\int_{y=0}^{a}\left(z+\frac{z^2}{2}\right)_0^c dy\,dx=\int_{x=0}^{b}\int_{y=0}^{a}\left(c+\frac{c^2}{2}\right)dy\,dx\\&=abc\left(1\frac{kg}{m^3}+\frac{1}{2}c\frac{kg}{m^4}\right)\end{aligned}$$

Bei Abmessungen $a=b=c=1m$ beträgt die Masse $1{,}5\ kg$, bei konstanter Dichte sind es $1{,}0\ kg$.

allgemeine Integrale

$$I = \int_{y=0}^{1,5}\int_{x=1}^{5y} y\,e^x\,dx\,dy = \int_{y=0}^{1,5} y\,e^x\Big|_1^{5y} dy = \int_{y=0}^{1,5} y\left(e^{5y} - e^1\right)dy$$ das muss teilweise partiell integriert werden!

$$I = \left(\frac{1}{5}y\,e^{5y} - \frac{1}{25}e^{5y} - \frac{1}{2}y^2\,e\right)_0^{1,5} = 467{,}073$$

$I = -\int x\,y\,dA$ über einen Halbkreis

Hierfür sind Polarkoordinaten zweckmäßig. Es ist

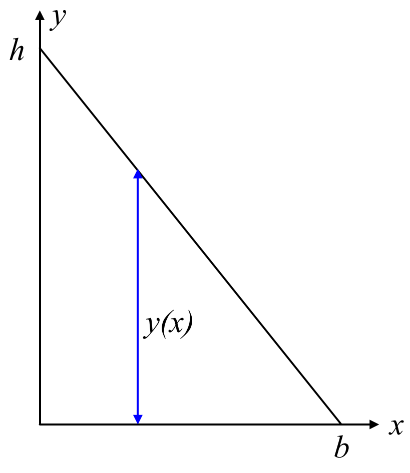
$$x = r\,cos(\varphi)$$
$$y = r\,sin(\varphi)$$
$$dA = r\,dr\,d\varphi$$

$$I = -\int_{r=0}^{R}\int_{\varphi=0}^{\pi} r^2\,sin(\varphi)cos(\varphi)r\,dr\,d\varphi$$
$$= -\frac{r^4}{4}\Big|_0^R \frac{sin^2(\varphi)}{2}\Big|_0^\pi = 0$$

$$I = \int_{x=0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{y=0}^{1}\int_{z=0}^{y^2} y\,z\,sin(x)dz\,dy\,dx = \int_{x=0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{y=0}^{1} y\,sin(x)\frac{z^2}{2}\Big|_0^{y^2} dy\,dx = \int_{x=0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{y=0}^{1}\left(\frac{y^5}{2} - \frac{y^3}{2}\right)sin(x)dy\,dx$$
$$= \left(\frac{y^6}{12} - \frac{y^4}{8}\right)_0^1 \left(-cos(x)\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{24}$$

Berechnung der Dreiecksfläche eines rechtwinkligen Dreiecks

$$A = \int dA = \iint_{(A)} dx\,dy = \int_{x=0}^{b}\int_{y=0}^{y(x)} dy\,dx$$



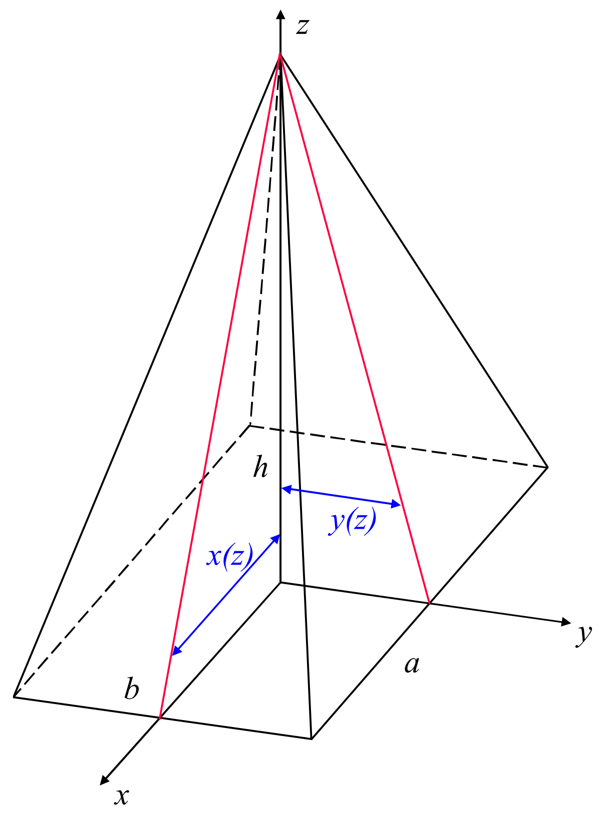
Die variable Grenze *y(x)* wird durch eine Geradengleichung beschrieben: $y(x) = h\left(1 - \frac{x}{b}\right)$

$$A = \int_{x=0}^{b}\int_{y=0}^{h\left(1-\frac{x}{b}\right)} dy\,dx = \int_{x=0}^{b} h\left(1 - \frac{x}{b}\right)dx = h\left(x - \frac{x^2}{2b}\right)_0^b = \frac{bh}{2}$$

Volumen einer Pyramide mit rechteckiger Grundfläche ab und der Höhe h

$$V = \int dV = \iiint\limits_{(V)} dx\,dy\,dz$$

Aus Symmetriegründen reicht hier die Berechnung von einem Viertel des Volumens.



$$V = 4\int_{z=0}^{h}\int_{x=0}^{x(z)}\int_{y=0}^{y(z)} dy\,dx\,dz$$

Die variablen Integrationsgrenzen sind die Geradengleichungen

$$x(z) = \frac{a}{2}\left(1-\frac{z}{h}\right)$$

$$y(z) = \frac{b}{2}\left(1-\frac{z}{h}\right)$$

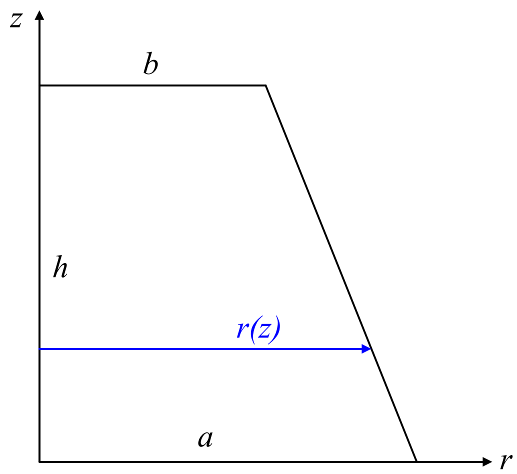
$$V = 4\int_{z=0}^{h} x(z)\,y(z)\,dz = 4\int_{z=0}^{h}\frac{a}{2}\left(1-\frac{z}{h}\right)\frac{b}{2}\left(1-\frac{z}{h}\right)dz$$

$$= ab\int_{z=0}^{h}\left(1-\frac{z}{h}\right)^2 dz = \frac{ab}{3}\left(1-\frac{z}{h}\right)^3(-h)\Bigg|_0^h$$

$$= \frac{abh}{3}$$

Volumen eines Kegelstumpfes (Zylinderkoordinaten)

Radius der Deckfläche b
Radius der Bodenfläche a
Höhe des Kegelstumpfes h
Symmetrieachse z



enthaltene Sonderfälle:

Kegel ($b=0$ oder $a=0$)
Zylinder ($a=b$)

Der Radius der Mantelfläche wird beschrieben durch $r(z) = C_1 z + C_2 = \dfrac{b-a}{h}z + a$.

$$V=\int dV=\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{z=0}^{h}\int_{r=0}^{r(z)} r\,dr\,dz\,d\varphi=2\pi\int_{z=0}^{h}\int_{r=0}^{C_1z+C_2} r\,dr\,dz$$

$$=2\pi\int_{z=0}^{h}\left.\frac{r^2}{2}\right|_0^{C_1z+C_2} dz=\pi\int_{z=0}^{h}\left(C_1z+C_2\right)^2 dz$$

Das Integral kann entweder als Polynom oder nach Ausmultiplizieren der binomischen Formel als Summe integriert werden.

Variante 1: ausmultiplizieren

$$V=\pi\int_{z=0}^{h}\left(C_1z+C_2\right)^2 dz=\pi\left(C_1^{\,2}\frac{z^3}{3}+2C_1C_2\frac{z^2}{2}+C_2^{\,2}z\right)_0^h$$

$$=\pi\left(C_1^{\,2}\frac{h^3}{3}+C_1C_2h^2+C_2^{\,2}h\right)_0^h$$

$$=\pi\left(\frac{1}{3}b^2h+\frac{1}{3}a^2h+\frac{1}{3}abh\right)=\frac{\pi h}{3}\left(b^2+a^2+ab\right)$$

Variante 2: Polynom

$$V=\pi\int_{z=0}^{h}\left(C_1z+C_2\right)^2 dz=\left.\frac{\pi}{3}\frac{\left(C_1z+C_2\right)^3}{C_1}\right|_0^h=\frac{\pi}{3C_1}\left(\left(C_1h+C_2\right)^3-C_2^{\,3}\right)$$

$$=\frac{\pi}{3}h\frac{a^3-b^3}{a-b}$$

und nach Polynomdivision

$$V=\frac{\pi}{3}h\frac{a^3-b^3}{a-b}=\frac{\pi}{3}h\left(a^2+ab+b^2\right)$$

Sonderfälle:

Kegel $\quad b=0 \quad V=\frac{\pi}{3}a^2h$

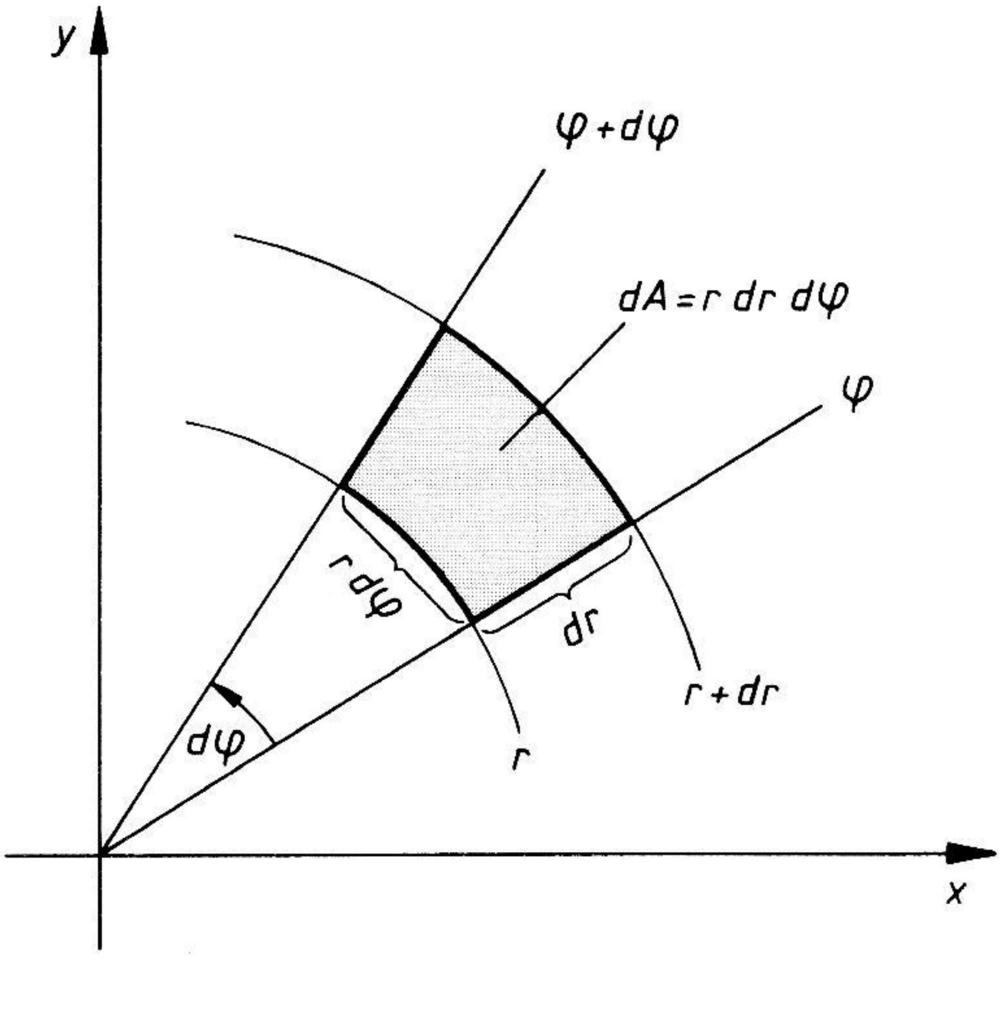
Zylinder $\quad a=b \quad V=\pi\,a^2h$

Anhang

Hier finden Sie einige Erläuterungen zu

- Polarkoordinaten,
- Zylinderkoordinaten und
- Kugelkoordinaten.

$$dA = (r\,d\varphi)\,dr = r\,dr\,d\varphi$$



Berechnung eines Doppelintegrals unter Verwendung kartesischer Koordinaten

Die Berechnung eines *Doppelintegrals* $\iint\limits_{(A)} f(x;\, y)\, dA$ erfolgt durch *zwei* nacheinander auszuführende *gewöhnliche* Integrationen:

$$\iint\limits_{(A)} f(x;\, y)\, dA = \int\limits_{x=a}^{b} \int\limits_{y=f_u(x)}^{f_o(x)} f(x;\, y)\, dy\, dx \qquad \text{(IV-127)}$$

(A): Integrationsbereich nach Bild IV-48

1. *Innere Integration* (*nach der Variablen* y)
   Die Variable x wird zunächst als eine Art *Konstante* (*Parameter*) betrachtet und die Funktion $f(x;\, y)$ unter Verwendung der für gewöhnliche Integrale gültigen Regeln *nach der Variablen* y integriert. In die ermittelte Stammfunktion setzt man dann für y die Integrationsgrenzen $f_o(x)$ bzw. $f_u(x)$ ein und bildet die entsprechende Differenz.
2. *Äußere Integration* (*nach der Variablen* x)
   Die als Ergebnis der inneren Integration erhaltene, nur noch von der Variablen x abhängige Funktion wird nun in den Grenzen von $x = a$ bis $x = b$ integriert (*gewöhnliche* Integration nach x).

Berechnung eines Doppelintegrals unter Verwendung von Polarkoordinaten

Beim Übergang von den *kartesischen* Koordinaten $(x;\, y)$ zu den *Polarkoordinaten* $(r;\, \varphi)$ gelten die Transformationsgleichungen

$$x = r \cdot \cos \varphi, \quad y = r \cdot \sin \varphi, \quad dA = r\, dr\, d\varphi \qquad \text{(IV-136)}$$

Ein Doppelintegral $\iint\limits_{(A)} f(x;\, y)\, dA$ transformiert sich dabei wie folgt:

$$\iint\limits_{(A)} f(x;\, y)\, dA = \int\limits_{\varphi = \varphi_1}^{\varphi_2} \int\limits_{r = r_i(\varphi)}^{r_a(\varphi)} f(r \cdot \cos \varphi;\, r \cdot \sin \varphi) \cdot r\, dr\, d\varphi \qquad \text{(IV-137)}$$

(A): Integrationsbereich nach Bild IV-55

Die Integralberechnung erfolgt dabei in *zwei* nacheinander auszuführenden *gewöhnlichen* Integrationsschritten:

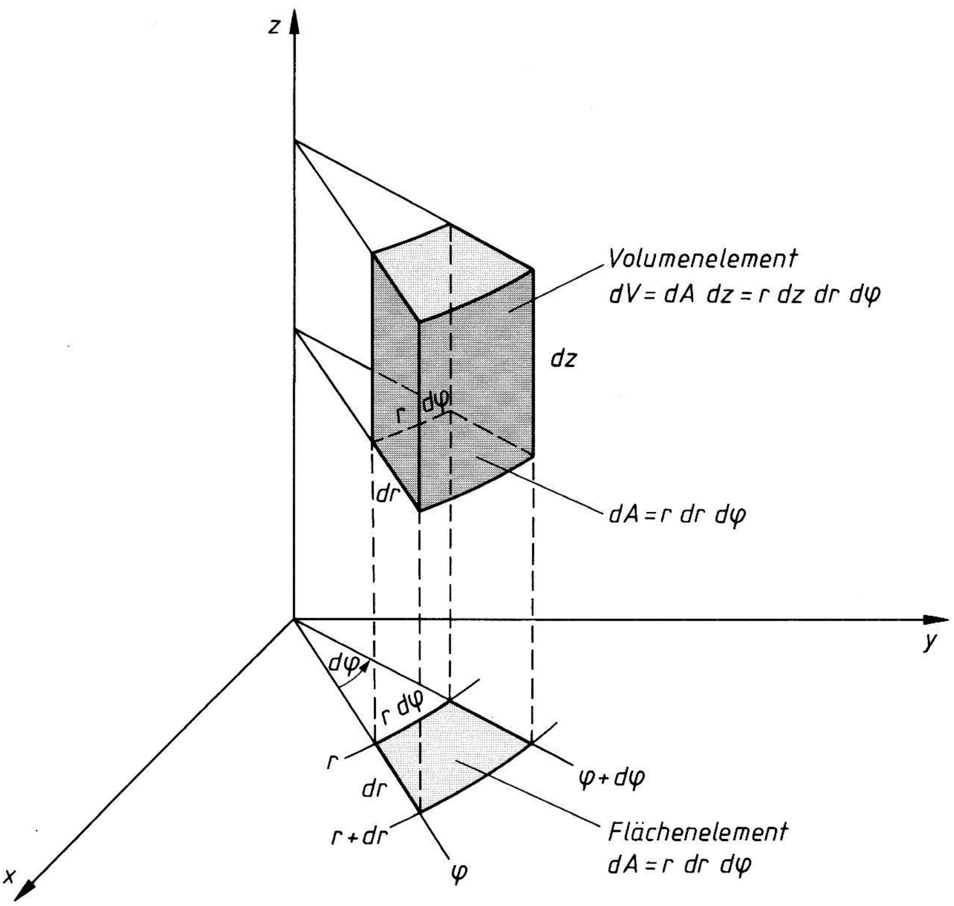
1. *Innere Integration* nach der Variablen r, wobei die Winkelkoordinate φ als Parameter festgehalten wird.
2. *Äußere Integration* nach der Variablen φ.

Zwischen den *kartesischen* Koordinaten $(x; y; z)$ und den *Zylinderkoordinaten* $(r; \varphi; z)$ bestehen dabei die folgenden *Transformationsgleichungen*

$$x = r \cdot \cos \varphi, \qquad y = r \cdot \sin \varphi, \qquad z = z$$

bzw.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \tan \varphi = \frac{y}{x}, \qquad z = z$$



Volumenelement dV in Zylinderkoordinaten

Berechnung eines Dreifachintegrals unter Verwendung kartesischer Koordinaten

Die Berechnung eines *Dreifachintegrals* $\iiint\limits_{(V)} f(x;\, y;\, z)\, dV$ erfolgt durch *drei* nacheinander auszuführende *gewöhnliche* Integrationen:

$$\iiint\limits_{(V)} f(x;\, y;\, z)\, dV = \int\limits_{x=a}^{b} \int\limits_{y=f_u(x)}^{f_o(x)} \int\limits_{z=z_u(x;\, y)}^{z_o(x;\, y)} f(x;\, y;\, z)\, dz\, dy\, dx \qquad \text{(IV-170)}$$

(V): Zylindrischer Integrationsbereich nach Bild IV-74.

Die einzelnen Integrationsschritte erfolgen dabei von *innen nach außen*, d.h. in der Reihenfolge z, y, x, wobei jeweils die übrigen Variablen als Parameter festgehalten werden.

Berechnung eines Dreifachintegrals unter Verwendung von Zylinderkoordinaten

Beim Übergang von den *kartesischen* Raumkoordinaten $(x;\, y;\, z)$ zu den *Zylinderkoordinaten* $(r;\, \varphi;\, z)$ gelten die Transformationsgleichungen

$$\begin{aligned} &x = r \cdot \cos \varphi, \qquad y = r \cdot \sin \varphi, \qquad z = z \\ &dV = dx\, dy\, dz = r\, dz\, dr\, d\varphi \end{aligned} \qquad \text{(IV-176)}$$

Ein *Dreifachintegral* $\iiint\limits_{(V)} f(x;\, y;\, z)\, dV$ transformiert sich dabei wie folgt:

$$\iiint\limits_{(V)} f(x;\, y;\, z)\, dV = \iiint\limits_{(V)} f(r \cdot \cos \varphi;\, r \cdot \sin \varphi;\, z) \cdot r\, dz\, dr\, d\varphi \qquad \text{(IV-177)}$$

Die Integration erfolgt dabei in *drei* nacheinander auszuführenden *gewöhnlichen* Integrationsschritten in der Reihenfolge z, r und φ.

Kugelkoordinaten und ihre wichtigsten Eigenschaften

Die *Kugelkoordinaten* r, ϑ und φ eines Raumpunktes P bestehen aus einer *Abstandskoordinate* r und zwei *Winkelkoordinaten* ϑ und φ (Bild I-90):

r: Länge des Ortsvektors $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$ $\quad (r \geqslant 0)$

ϑ: Winkel zwischen dem Ortsvektor $\vec{r}$ und der *positiven* z-Achse $(0 \leqslant \vartheta \leqslant \pi)$

φ: Winkel zwischen der Projektion des Ortsvektors $\vec{r}$ auf die x, y-Ebene und der *positiven x-Achse* $(0 \leqslant \varphi < 2\pi)$

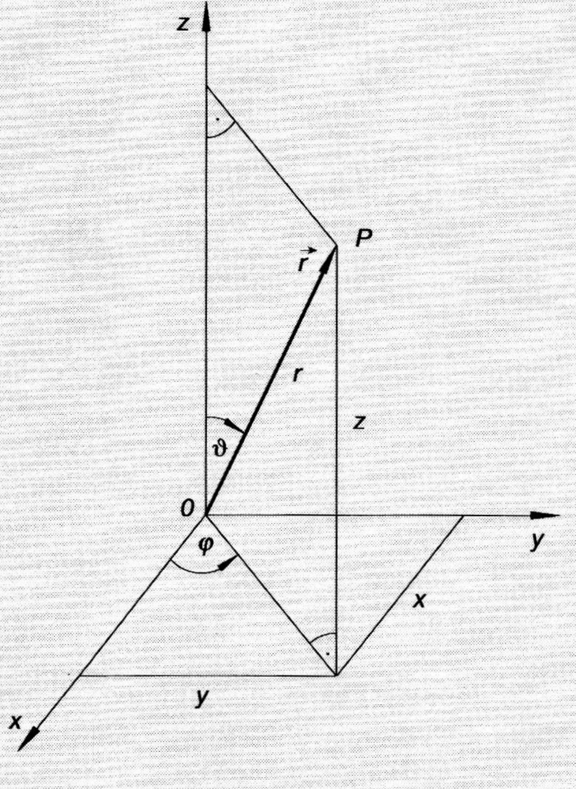


Bild I-90
Kugelkoordinaten

Koordinatenflächen

Koordinatenflächen entstehen, wenn jeweils *eine* der drei Kugelkoordinaten *festgehalten* wird:

r = const.: Kugeloberfläche (Kugelschale; Bild I-91) [17)]

ϑ = const.: Mantelfläche eines Kegels (Kegelspitze im Koordinatenursprung, Öffnungswinkel: 2ϑ; Bild I-92)

φ = const.: Halbebene durch die z-Achse (Bild I-93)

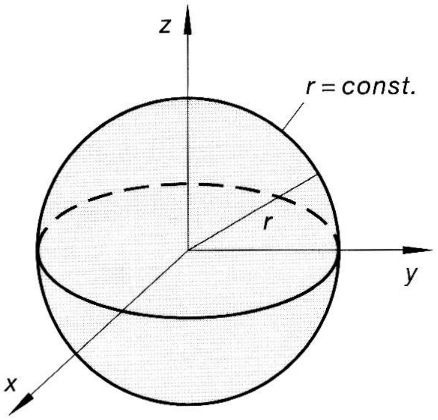


Bild I-91
Koordinatenfläche r = const.
(Kugelschale)

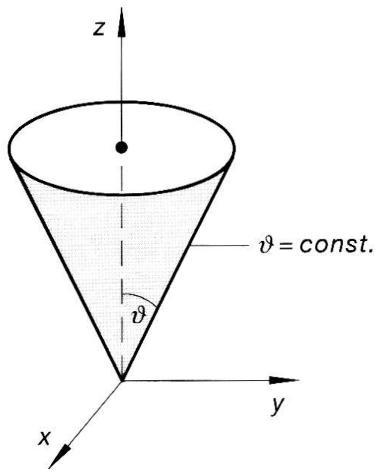


Bild I-92
Koordinatenfläche ϑ = const.
(Kegelmantel)

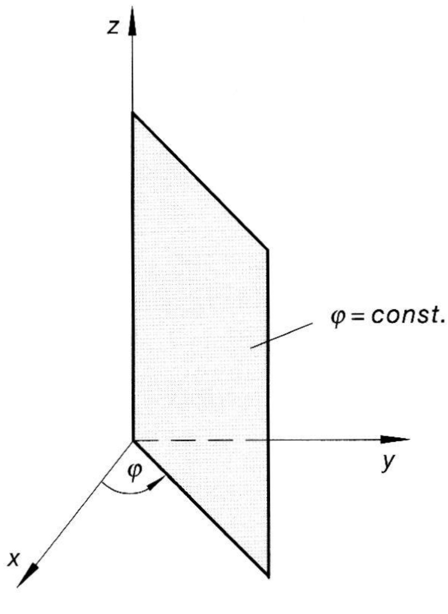


Bild I-93
Koordinatenfläche φ = const.
(Halbebene, begrenzt
durch die z-Achse)

Die Koordinatenflächen stehen in jedem Punkt paarweise *senkrecht* aufeinander.

Koordinatenlinien

Koordinatenlinien entstehen, wenn jeweils *zwei* der drei Kugelkoordinaten *festgehalten* werden. Sie sind somit *Schnittkurven* zweier Koordinatenflächen:

ϑ, φ = const.: *Radialer* Strahl vom Koordinatenursprung nach *außen* (r-Linie; Bild I-94)

r, ϑ = const.: *Breitenkreis* mit dem Radius $r \cdot \sin\vartheta$ (φ-Linie; Bild I-95)

r, φ = const.: *Längenkreis* (ϑ-Linie; Bild I-96)

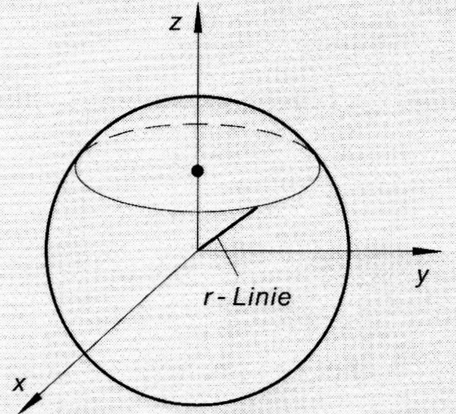


Bild I-94
r-Koordinatenlinie (Strahl)

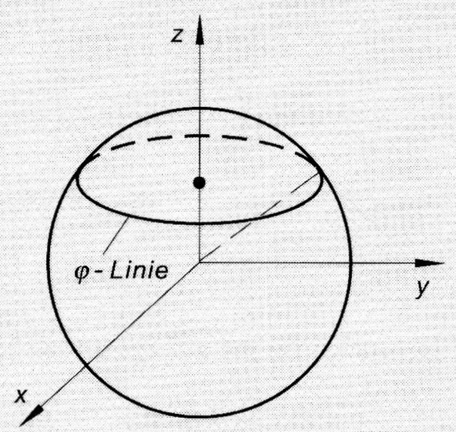


Bild I-95
φ-Koordinatenlinie (Breitenkreis)

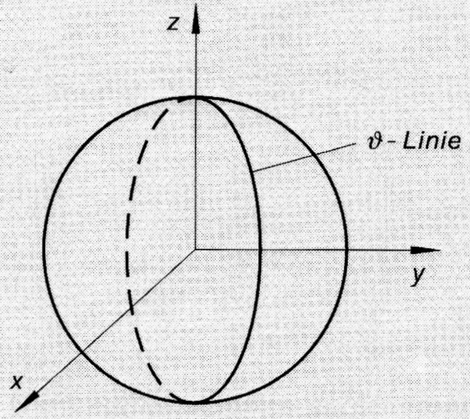


Bild I-96
ϑ-Koordinatenlinie (Längenkreis)

Die Koordinatenlinien stehen in jedem Punkt paarweise *senkrecht* aufeinander. Die Kugelkoordinaten sind daher (wie die kartesischen Koordinaten und die Zylinderkoordinaten) *orthogonale* räumliche Koordinaten.

Zusammenhang zwischen den Kugelkoordinaten r, ϑ, φ und den kartesischen Koordinaten x, y, z (Bild I-90)

Kugelkoordinaten → Kartesische Koordinaten

$$x = r \cdot \sin\vartheta \cdot \cos\varphi$$
$$y = r \cdot \sin\vartheta \cdot \sin\varphi \qquad \text{(I-305)}$$
$$z = r \cdot \cos\vartheta$$

Kartesische Koordinaten → Kugelkoordinaten

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$
$$\vartheta = \arccos\left(\frac{z}{r}\right) = \arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) \qquad \text{(I-306)}$$
$$\tan\varphi = \frac{y}{x}$$

Flächenelement dA auf der Kugeloberfläche (r = const.; Bild I-97)

$$dA = r^2 \cdot \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi \qquad \text{(I-307)}$$

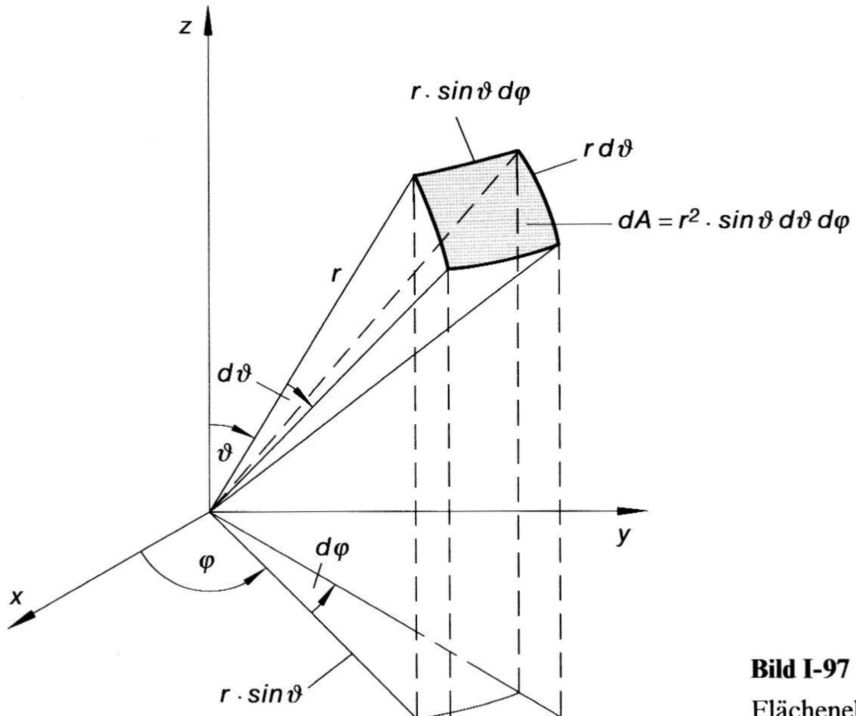


Bild I-97
Flächenelement dA
auf der Kugeloberfläche

Linienelement ds

Das *Linienelement* ist die *geradlinige* Verbindung zweier differentiell benachbarter Punkte, die sich in ihren Kugelkoordinaten um dr, $d\vartheta$, $d\varphi$ voneinander unterscheiden. Es besitzt die *Länge*

$$ds = \sqrt{(dr)^2 + r^2 (d\vartheta)^2 + r^2 \cdot \sin^2 \vartheta \, (d\varphi)^2} \qquad \text{(I-308)}$$

Volumenelement dV (Bild I-98)

$$dV = dA \, dr = r^2 \cdot \sin \vartheta \, dr \, d\vartheta \, d\varphi \qquad \text{(I-309)}$$

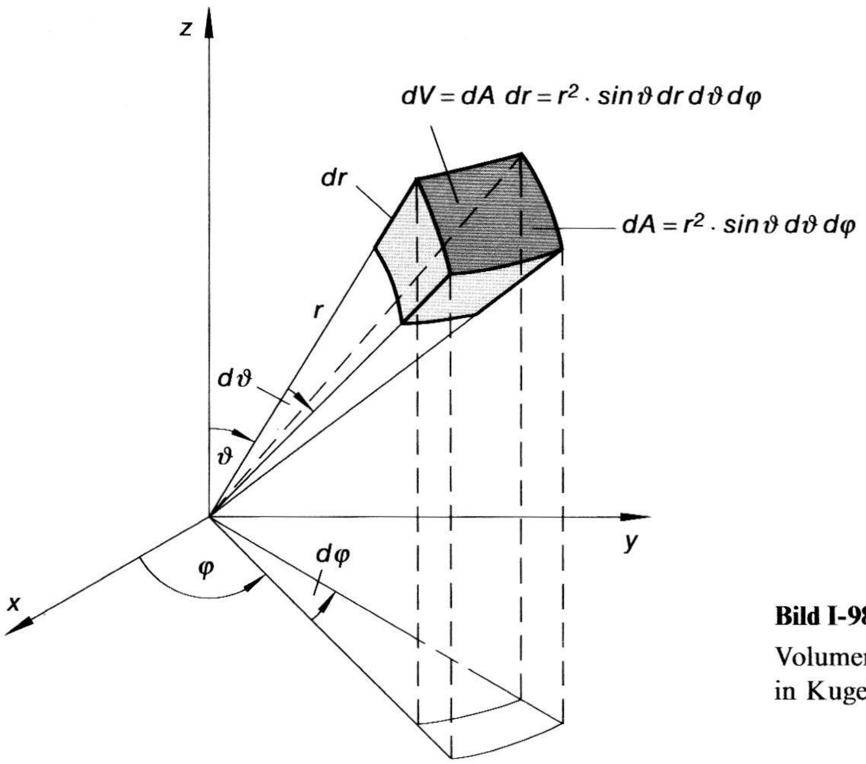


Bild I-98
Volumenelement dV in Kugelkoordinaten