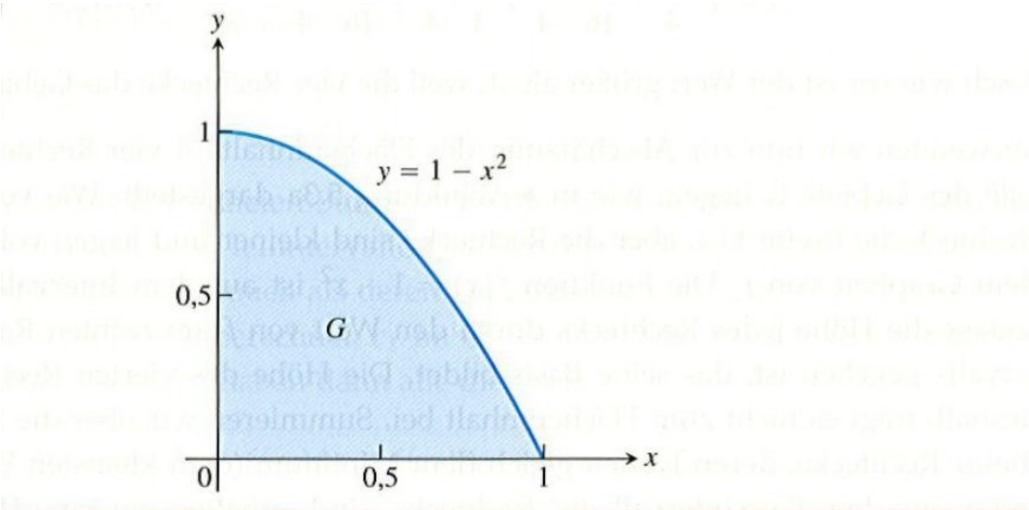
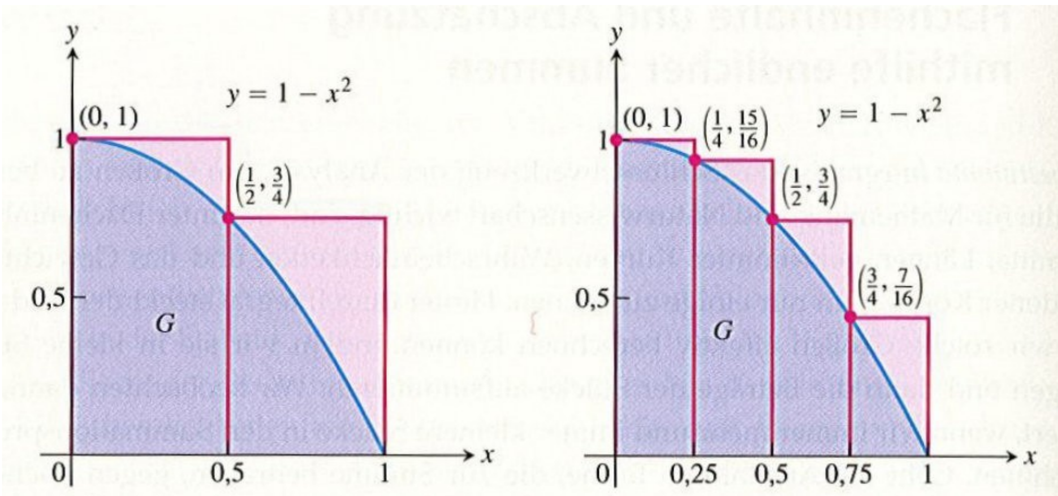
Flächeninhalte und Abschätzung mithilfe (un)endlicher Summen

Der Flächeninhalt des Gebietes zwischen der x-Achse und der Funktion $y=1-x^2$ im Bereich $x=0$ bis $x=1$ soll bestimmt werden.



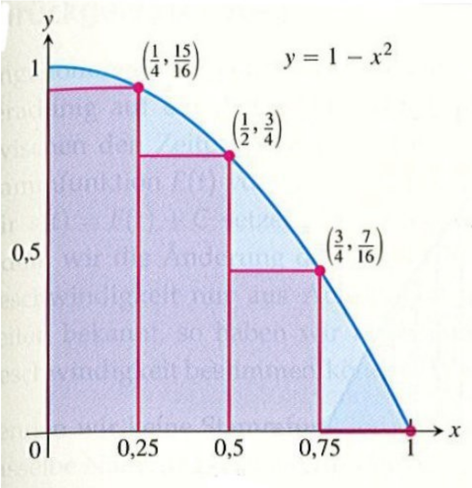
Der Flächeninhalt des Gebiets *G* kann nicht mithilfe einer einfachen Formel bestimmt werden.

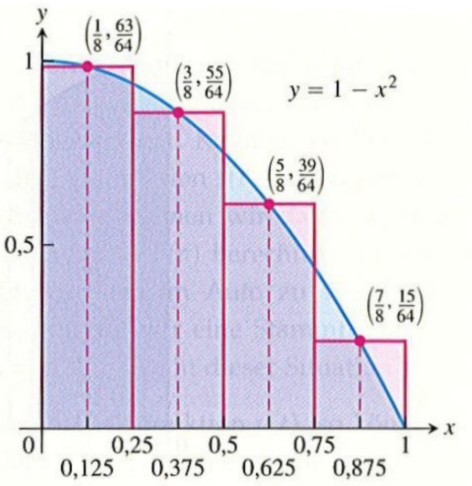
Dazu kann das Gebiet in rechteckige Streifen gleicher Breite unterteilt werden. Es gibt verschiedene Möglichkeiten die Höhe dieser Streifen zu definieren. (linke/rechte obere Ecke des Streifen, Mitte des Streifens). Abhängig davon und von der Zahl der Streifen (Breite der Streifen) erhalten wir unterschiedliche Näherungslösungen.



Die Bilder zeigen Näherungen mit Obersummen bei unterschiedlicher Diskretisierung. Wir erhalten

$$A \approx 1\cdot\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{7}{8}=0{,}875 \qquad A \approx 1\cdot\frac{1}{4}+\frac{15}{16}\cdot\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}+\frac{7}{16}\cdot\frac{1}{4}=\frac{25}{32}=0{,}78125$$



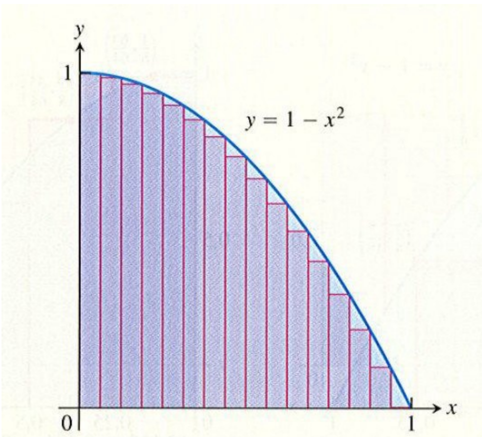


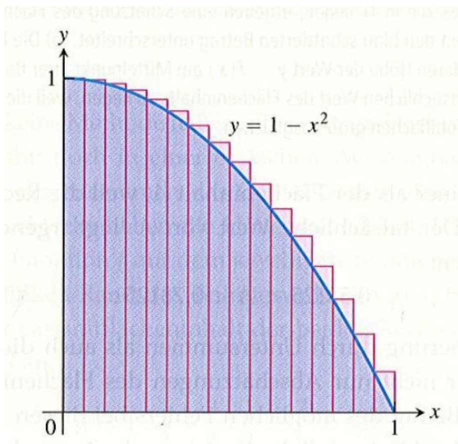
Diese Bilder zeigen Näherungen mit Unter- und Mittelsummen. Wir erhalten

$A \approx \frac{15}{16} \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{7}{16} \cdot \frac{1}{4} + 0 \cdot \frac{1}{4} = \frac{17}{32} = 0{,}53125$ für die Untersumme.

Somit muss der wahre Flächeninhalt zwischen $0{,}53125 < A < 0{,}78125$ liegen. Eine weitere Verbesserung bringt die Mittelpunktsregel.

$$A \approx \frac{63}{64} \cdot \frac{1}{4} + \frac{55}{64} \cdot \frac{1}{4} + \frac{39}{64} \cdot \frac{1}{4} + \frac{15}{64} \cdot \frac{1}{4} = \frac{172}{64} \cdot \frac{1}{4} = 0{,}671875$$





Verbesserte Näherungen erhält man durch eine deutlich feinere Unterteilung mit 16 statt 4 Streifen. Man kann diese Verfeinerung beliebig weiter fortsetzen. Die führt auf folgende Ergebnisse:

Anzahl der Teilintervalle	Untersumme	Mittelpunktsregel	Obersumme
2	0,375	0,6875	0,875
4	0,53125	0,671875	0,78125
16	0,634765625	0,6669921875	0,697265625
50	0,6566	0,6667	0,6766
100	0,66165	0,666675	0,67165
1000	0,6661665	0,66666675	0,6671665

Letztendlich bedeutet dies $A = \sum_{i=1}^{\infty} A_i \approx \sum_{i=1}^{n} A_i = \sum_{i=1}^{n} h_i \cdot \Delta x = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} h_i$ mit $a=0$ und $b=1$ und der aktuellen Streifenhöhe h_i (d.h. $f(x_i)$) für dieses Beispiel.
Führt man den Grenzübergang mit $n \to \infty$ ($\Delta x \to 0$) durch, erhält man das Integral $A = \int dA = \int_a^b f(x)\,dx$. Für das Beispiel ist $A = \int_0^1 \left(1 - x^2\right) dx = \left(x - \frac{x^3}{3}\right)_0^1 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} = 0{,}666\overline{6}$.
Man erkannt aus der Tabelle oben, dass mit zumehmender Verfeinerung der Streifen das Ergebnis gegen diesen Wert konvergiert und die Mittelpunktsregel hier die besten Ergebnisse liefert.

Allgemein ist $A = \int dA = \iint dx\,dy$, also ein 2-fach Integral (Doppelintegral) wobei die Darstellung von dA vom verwendeten Koordinatensystem abhängt.

Eine vergleichbare Vorgehensweise, dann mit prismatischen Säulen, ist zur Volumenbestimmung möglich. Diese führt uns dann zu den 3-fach Integralen.