Integralrechnung

1 Integration als Umkehrung der Differentiation

Das *Grundproblem* der in Kapitel IV behandelten Differentialrechnung besteht in der Bestimmung der *Ableitung* einer vorgegebenen Funktion $y = f(x)$. Dieser Vorgang wird als *Differentiation* bezeichnet und läßt sich schematisch wie folgt darstellen:

$$y = f(x) \xrightarrow{\text{Differentiation}} y' = f'(x)$$

In den naturwissenschaftlich-technischen Anwendungen stellt sich aber auch häufig das *umgekehrte* Problem: Von einer zunächst noch *unbekannten* Funktion $y = f(x)$ ist die *Ableitung* $y' = f'(x)$ bekannt und die Funktion selbst ist zu bestimmen. *Die Aufgabe besteht also darin, von der gegebenen Ableitung auf die Funktion zu schließen*:

$$y' = f'(x) \longrightarrow y = f(x)$$

Auf ein solches Problem stößt man beispielsweise in der *Mechanik*, wenn von einer Bewegung das *Geschwindigkeits-Zeit-Gesetz* $v = v(t)$ bekannt ist und daraus dann das *Weg-Zeit-Gesetz* $s = s(t)$ ermittelt werden soll. Denn bekanntlich ist die Geschwindigkeit die *1. Ableitung* des Weges nach der Zeit: $v = \dot{s}$ (vgl. hierzu auch Abschnitt IV.2.13.1). Auch hier soll also von der *bekannten* Ableitung $\dot{s}$ einer noch *unbekannten* Funktion $s = s(t)$ auf die Funktion selbst geschlossen werden:

$$\dot{s} = v(t) \longrightarrow s = s(t)$$

■ **Beispiele**

(1) *Gegeben*: $y' = 1$

Gesucht: *Sämtliche* Funktionen $y = f(x)$ mit der 1. Ableitung $y' = 1$

Lösung:

Jede lineare Funktion vom Typ $y = x + C$ ist wegen

$$y' = \frac{d}{dx}(x + C) = 1$$

eine Lösung der gestellten Aufgabe (C: beliebige reelle Zahl). Es handelt sich dabei um die in Bild V-1 skizzierte *parallele Geradenschar*. Für *jeden* Wert des Parameters C erhält man genau *eine* Gerade.

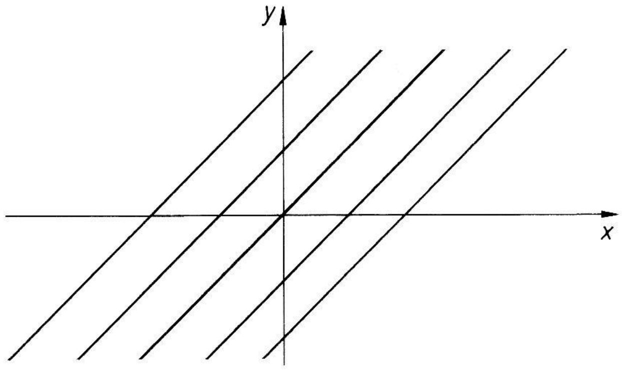


Bild V-1
Geradenschar $y = x + C$

(2) *Gegeben*: $y' = 2x$

Gesucht: *Sämtliche* Funktionen $y = f(x)$ mit der 1. Ableitung $y' = 2x$

Lösung:

$$y = x^2 + C \qquad (\textit{Parabelschar}, \text{ vgl. Bild V-2})$$

Denn für jedes (reelle) C ist

$$y' = \frac{d}{dx}(x^2 + C) = 2x$$

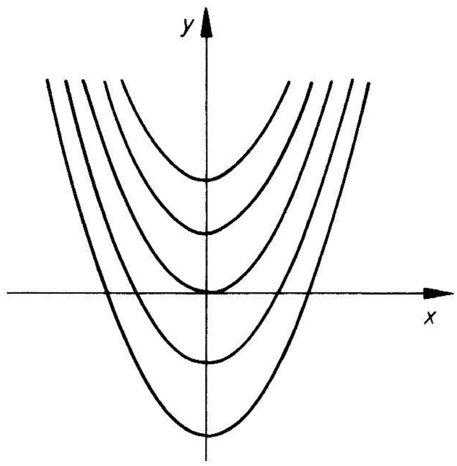


Bild V-2
Parabelschar $y = x^2 + C$

■

Wir nehmen noch folgende *Umbenennungen* vor:

$f(x)$: Vorgegebene *1. Ableitung* einer (zunächst noch unbekannten) Funktion

$F(x)$: *Jede* Funktion mit der 1. Ableitung $F'(x) = f(x)$

Eine Funktion $F(x)$ mit dieser Eigenschaft wird als eine *Stammfunktion* zu $f(x)$ bezeichnet.

Wir definieren also:

Definition: Eine Funktion $F(x)$ heißt eine *Stammfunktion* zu $f(x)$, wenn

$$F'(x) = f(x) \tag{V-1}$$

gilt.

■ **Beispiele**

(1) $f(x) = 2x \quad \Rightarrow \quad F(x) = x^2 + C \qquad$ ($C \in \mathbb{R}$; *Parabelschar* aus Bild V-2)

Denn die 1. Ableitung von $F(x)$ ergibt genau $f(x)$:

$$F'(x) = \frac{d}{dx}(x^2 + C) = 2x = f(x)$$

(2) $f(x) = \cos x \quad \Rightarrow \quad F(x) = \sin x + C \qquad (C \in \mathbb{R})$

Denn es ist

$$F'(x) = \frac{d}{dx}(\sin x + C) = \cos x = f(x)$$

(3) $f(x) = \mathrm{e}^x + \dfrac{1}{1 + x^2} \quad \Rightarrow \quad F(x) = \mathrm{e}^x + \arctan x + C \qquad (C \in \mathbb{R})$

Denn es gilt

$$F'(x) = \frac{d}{dx}(\mathrm{e}^x + \arctan x + C) = \mathrm{e}^x + \frac{1}{1 + x^2} = f(x)$$

(4) $f(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x} \quad \Rightarrow \quad F(x) = \tan x + C \qquad (C \in \mathbb{R})$

Denn die erste Ableitung der Funktionenschar $F(x) = \tan x + C$ ergibt genau die Funktion $f(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$:

$$F'(x) = \frac{d}{dx}(\tan x + C) = \frac{1}{\cos^2 x} = f(x)$$

■

Anhand dieser Beispiele lassen sich die *wesentlichen Eigenschaften der Stammfunktionen* erkennen. Wir fassen sie wie folgt zusammen:

Eigenschaften der Stammfunktionen

1. Es gibt zu jeder *stetigen* Funktion $f(x)$ *unendlich* viele Stammfunktionen.

2. Zwei beliebige Stammfunktionen $F_1(x)$ und $F_2(x)$ zu $f(x)$ unterscheiden sich durch eine *additive* Konstante:

$$F_1(x) - F_2(x) = \text{const.} \qquad \text{(V-2)}$$

3. Ist $F_1(x)$ eine *beliebige* Stammfunktion zu $f(x)$, so ist auch $F_1(x) + C$ eine Stammfunktion zu $f(x)$. Daher läßt sich die *Menge aller Stammfunktionen* in der Form

$$F(x) = F_1(x) + C \qquad \text{(V-3)}$$

darstellen (C ist dabei eine *beliebige reelle* Konstante).

Der zum Auffinden *sämtlicher* Stammfunktionen führende Prozeß heißt *Integration*:

Definition: Das Aufsuchen *sämtlicher* Stammfunktionen $F(x)$ zu einer vorgegebenen Funktion $f(x)$ wird als *Integration* bezeichnet:

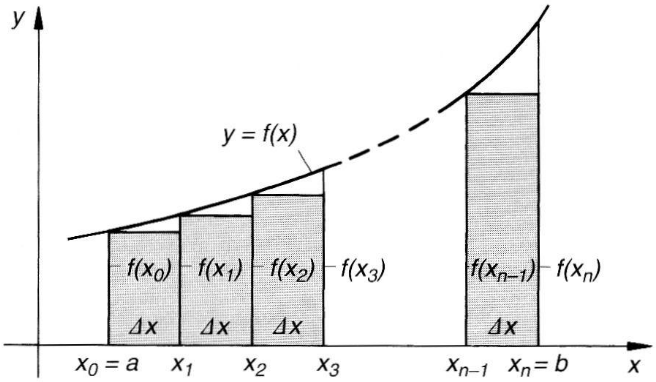
$$f(x) \xrightarrow{\text{Integration}} F(x) \quad \text{mit} \quad F'(x) = f(x) \qquad \text{(V-4)}$$

Wir dürfen daher die Integration als Umkehrung der Differentiation auffassen. Während der *Differentiationsprozeß* aus einer vorgegebenen Funktion die *Ableitung* erzeugt, wird durch den Prozeß der *Integration* aus einer vorgegebenen Ableitungsfunktion die *Gesamtheit der Stammfunktionen* ermittelt.

1 Bestimmtes Integral

1.1 Definition eines bestimmten Integrals

Das *bestimmte Integral* $\int_a^b f(x)\,dx$ läßt sich in anschaulicher Weise als *Flächeninhalt* A zwischen der *stetigen* Funktion $y = f(x)$, der x-Achse und den beiden zur y-Achse parallelen Geraden $x = a$ und $x = b$ deuten, sofern die Kurve im gesamten Intervall $a \le x \le b$ *oberhalb* der x-Achse verläuft.



Wir zerlegen zunächst die Fläche in n Streifen *gleicher* Breite $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$, ersetzen jeden Streifen in der aus der Abbildung ersichtlichen Weise durch ein *Rechteck* und summieren dann über alle Rechtecksflächen. Dies führt (bei einer monoton wachsenden Funktion) zu der sog. *Untersumme*

$$U_n = f(x_0)\,\Delta x + f(x_1)\,\Delta x + f(x_2)\,\Delta x + \ldots + f(x_{n-1})\,\Delta x = \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})\,\Delta x$$

die einen *Näherungswert* für den gesuchten Flächeninhalt darstellt. Beim Grenzübergang $n \to \infty$ (und somit $\Delta x \to 0$) strebt die Untersumme U_n gegen einen *Grenzwert*, der als *bestimmtes Integral* von $f(x)$ in den Grenzen von $x = a$ bis $x = b$ bezeichnet wird und geometrisch als *Flächeninhalt* A unter der Kurve $y = f(x)$ im Intervall $a \le x \le b$ interpretiert werden darf.

Symbolische Schreibweise:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n \to \infty} U_n = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})\,\Delta x$$

Bezeichnungen

x: Integrationsvariable
$f(x)$: Integrandfunktion (kurz: Integrand)
a, b: Untere bzw. obere Integrationsgrenze

1.2 Berechnung eines bestimmten Integrals

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

(sog. *Hauptsatz der Integralrechnung*)
$F(x)$ ist dabei irgendeine *Stammfunktion* zu $f(x)$ $(F'(x) = f(x)$, siehe V.2.2).

■ **Beispiele**

(1) $\int\limits_0^{\pi/2} \cos x\,dx = [\sin x]_0^{\pi/2} = \sin(\pi/2) - \sin 0 = 1 - 0 = 1$

Denn $F(x) = \sin x$ ist wegen $F'(x) = \frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$ eine *Stammfunktion* zu $f(x) = \cos x$.

(2) $\int\limits_{-3}^{3} (x^2 - 4x + 1)\,dx = ?$

$F(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + x$ ist eine Stammfunktion des Integranden, da

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + x\right) = x^2 - 4x + 1$$

gilt. Somit ist

$$\int_{-3}^{3} (x^2 - 4x + 1)\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + x\right]_{-3}^{3} =$$

$$= (9 - 18 + 3) - (-9 - 18 - 3) =$$

$$= -6 - (-30) = 24$$

■

1.3 Elementare Integrationsregeln für bestimmte Integrale

Regel 1: Faktorregel

Ein *konstanter* Faktor C darf *vor* das Integral gezogen werden:

$$\int_a^b C \cdot f(x)\,dx = C \cdot \int_a^b f(x)\,dx$$

Regel 2: Summenregel

Eine *endliche* Summe von Funktionen darf *gliedweise* integriert werden:

$$\int_a^b [f_1(x) + \ldots + f_n(x)]\,dx = \int_a^b f_1(x)\,dx + \ldots + \int_a^b f_n(x)\,dx$$

Regel 3: Vertauschungsregel

Vertauschen der Integrationsgrenzen bewirkt einen *Vorzeichenwechsel* des Integrals:

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$

Regel 4: Fallen die Integrationsgrenzen *zusammen* $(a = b)$, so ist der Integralwert gleich *Null:*

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

Regel 5: Für jede Stelle c aus dem Integrationsintervall gilt:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \qquad (a \le c \le b)$$

Geometrische Deutung: Zerlegung der Fläche in zwei Teilflächen

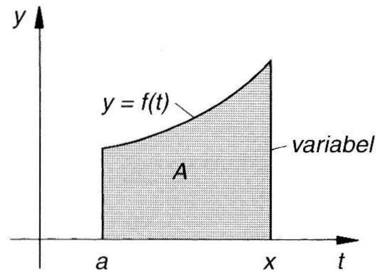
2 Unbestimmtes Integral

2.1 Definition eines unbestimmten Integrals

Das *unbestimmte Integral* $I(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ beschreibt den *Flächeninhalt* A zwischen der *stetigen* Kurve $y = f(t)$ und der t-Achse im Intervall $a \le t \le x$ in Abhängigkeit von der *oberen* (variabel gehaltenen) Grenze x und wird daher auch als *Flächenfunktion* bezeichnet (*Voraussetzung:* $f(t) \ge 0$ und $x \ge a$).

$$I(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

Man beachte: Ein *bestimmtes* Integral ist eine *Zahl (Flächeninhalt A),* ein *unbestimmtes Integral dagegen eine Funktion* der oberen Grenze x (*Flächenfunktion* $I(x)$)!



2.2 Allgemeine Eigenschaften der unbestimmten Integrale

1. Zu jeder *stetigen* Funktion $f(x)$ gibt es *unendlich* viele unbestimmte Integrale, die sich in ihrer *unteren* Integrationsgrenze voneinander unterscheiden.

2. Die *Differenz* zweier unbestimmter Integrale von $f(x)$ ist eine *Konstante.*

3. *Differenziert* man ein unbestimmtes Integral $I(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ nach der *oberen* Grenze x, so erhält man die *Integrandfunktion* $f(x)$ (sog. *Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung*):

$$I(x) = \int_a^x f(t)\,dt \quad \Rightarrow \quad \frac{dI}{dx} = I'(x) = f(x)$$

Allgemein wird eine Funktion $F(x)$ mit der Eigenschaft $F'(x) = f(x)$ als eine *Stammfunktion* zu $f(x)$ bezeichnet. In diesem Sinne läßt sich der *Fundamentalsatz* auch wie folgt formulieren: Jedes *unbestimmte* Integral $I(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ von $f(x)$ ist eine *Stammfunktion* zu $f(x)$.

4. Ist $F(x)$ *irgendeine* Stammfunktion zu $f(x)$ und C_1 eine geeignete reelle Konstante, so gilt

$$I(x) = \int_a^x f(t)\,dt = F(x) + C_1$$

Die Konstante C_1 läßt sich aus der Bedingung $I(a) = F(a) + C_1 = 0$ berechnen: $C_1 = -F(a)$.

5. Die Menge *aller* Funktionen vom Typ $I(x) + K = \int_a^x f(t)\,dt + K$ wird als *unbestimmtes Integral* von $f(x)$ bezeichnet und durch das Symbol $\int f(x)\,dx$ gekennzeichnet (die Integrationsgrenzen werden *weggelassen*):

$$\int f(x)\,dx \equiv \int_a^x f(t)\,dt + K \qquad (K \in \mathbb{R})$$

Die Begriffe „Stammfunktion zu $f(x)$" und „unbestimmtes Integral von $f(x)$" sind somit *gleichwertig*. Das *unbestimmte* Integral $\int f(x)\,dx$ von $f(x)$ ist daher in der Form

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \qquad (F'(x) = f(x))$$

darstellbar, wobei $F(x)$ *irgendeine* Stammfunktion zu $f(x)$ bedeutet und die Integrationskonstante C *alle* reellen Werte durchläuft. Das Aufsuchen *sämtlicher* Stammfunktionen $F(x)$ zu einer vorgegebenen Funktion $f(x)$ heißt *unbestimmte Integration:*

$$f(x) \xrightarrow[\text{Integration}]{\text{Unbestimmte}} F(x) \quad \text{mit} \quad F'(x) = f(x)$$

Geometrische Deutung der Stammfunktionen: Die Stammfunktionen (oder Integralkurven) zu einer stetigen Funktion $f(x)$ bilden eine *einparametrige Kurvenschar.* Jede Integralkurve entsteht dabei aus jeder anderen durch *Parallelverschiebung* in der y-Richtung.

6. *Faktor-* und *Summenregel* für *bestimmte* Integrale gelten sinngemäß auch für *unbestimmte* Integrale (siehe V.1.3).

■ **Beispiel**

$\int (2x - \sin x)\,dx = ?$

Stammfunktion zu $f(x) = 2x - \sin x$: $F(x) = x^2 + \cos x$, da $F'(x) = 2x - \sin x = f(x)$ ist.

Lösung: $\int (2x - \sin x)\,dx = F(x) + C = x^2 + \cos x + C \qquad (C \in \mathbb{R})$

■

2.3 Tabelle der Grund- oder Stammintegrale

$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad (n \neq -1)$	$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln\lvert x\rvert + C$
$\int e^x\,dx = e^x + C$	$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$	$\int \cos x\,dx = \sin x + C$
$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + C$	$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\cot x + C$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \begin{cases} \arcsin x + C_1 \\ -\arccos x + C_2 \end{cases}$	$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \begin{cases} \arctan x + C_1 \\ -\operatorname{arccot} x + C_2 \end{cases}$
$\int \sinh x\,dx = \cosh x + C$	$\int \cosh x\,dx = \sinh x + C$
$\int \frac{1}{\cosh^2 x}\,dx = \tanh x + C$	$\int \frac{1}{\sinh^2 x}\,dx = -\coth x + C$
$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \operatorname{arsinh} x + C = \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2+1}\right\rvert + C$	
$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = \operatorname{arcosh}\lvert x\rvert + C = \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2-1}\right\rvert + C \qquad (\lvert x\rvert > 1)$	
$\int \frac{1}{1-x^2}\,dx = \begin{cases} \operatorname{artanh} x + C_1 = \frac{1}{2}\cdot\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + C_1 & \lvert x\rvert < 1 \\ & \text{für} \\ \operatorname{arcoth} x + C_2 = \frac{1}{2}\cdot\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) + C_2 & \lvert x\rvert > 1 \end{cases}$	

3 Integrationsmethoden

3.1 Integration durch Substitution

3.1.1 Allgemeines Verfahren

Das vorgegebene Integral $\int f(x)\,dx$ wird mit Hilfe einer geeigneten *Substitution* wie folgt in ein *Grund-* oder *Stammintegral* übergeführt[1]:

1. *Aufstellung der Substitutionsgleichungen:*

$$u = g(x)\,, \quad \frac{du}{dx} = g'(x)\,, \quad dx = \frac{du}{g'(x)}$$

bzw.

$$x = h(u)\,, \quad \frac{dx}{du} = h'(u)\,, \quad dx = h'(u)\,du$$

($u = g(x)$ bzw. $x = h(u)$ müssen *monotone* Funktionen sein)

2. *Durchführung der Integralsubstitution:*

$$\int f(x)\,dx = \int \varphi(u)\,du$$

3. *Integration (Berechnung des neuen Integrals):*

$$\int \varphi(u)\,du = \Phi(u)$$

4. *Rücksubstitution:*

$$\int f(x)\,dx = \int \varphi(u)\,du = \Phi(u) = \Phi(g(x)) = F(x)$$

Anmerkung

Bei einem *bestimmten* Integral kann auf die Rücksubstitution *verzichtet* werden, wenn man die Integrationsgrenzen mit Hilfe der Substitutionsgleichung $u = g(x)$ bzw. $x = h(u)$ *mitsubstituiert.*

[1] Dies gelingt nicht immer im 1. Schritt. Gegebenenfalls muß das neue Integral nach einer *anderen* Integrationstechnik weiterbehandelt werden.

3.1.2 Spezielle Integralsubstitutionen (Tabelle)

Integraltyp	Substitution	Neues Integral bzw. Lösung	Beispiel
(A) $\int f(ax+b)\,dx$	$u = ax + b$ $dx = \frac{du}{a}$	$\frac{1}{a} \cdot \int f(u)\,du$	$\int \sqrt{4x+5}\,dx$ $(u = 4x + 5)$
(B) $\int f(x) \cdot f'(x)\,dx$	$u = f(x)$ $dx = \frac{du}{f'(x)}$	$\frac{1}{2}[f(x)]^2 + C$	$\int \sin x \cdot \cos x\,dx$ $(u = \sin x)$
(C) $\int [f(x)]^n \cdot f'(x)\,dx$ $(n \neq -1)$	$u = f(x)$ $dx = \frac{du}{f'(x)}$	$\frac{1}{n+1}[f(x)]^{n+1} + C$	$\int (\ln x)^2 \cdot \frac{1}{x}\,dx$ $(u = \ln x)$
(D) $\int f[g(x)] \cdot g'(x)\,dx$	$u = g(x)$ $dx = \frac{du}{g'(x)}$	$\int f(u)\,du$	$\int x \cdot e^{x^2}\,dx$ $(u = x^2)$
(E) $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$	$u = f(x)$ $dx = \frac{du}{f'(x)}$	$\ln\|f(x)\| + C$	$\int \frac{2x-3}{x^2-3x+1}\,dx$ $(u = x^2 - 3x + 1)$
(F) $\int R\left(x; \sqrt{a^2-x^2}\right)dx$ R: Rationale Funktion von x und $\sqrt{a^2-x^2}$	$x = a \cdot \sin u$ $dx = a \cdot \cos u\,du$ $\sqrt{a^2-x^2} = a \cdot \cos u$		$\int \frac{x^3}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$ $(x = 2 \cdot \sin u)$
(G) $\int R\left(x; \sqrt{x^2+a^2}\right)dx$ R: Rationale Funktion von x und $\sqrt{x^2+a^2}$	$x = a \cdot \sinh u$ $dx = a \cdot \cosh u\,du$ $\sqrt{x^2+a^2} = a \cdot \cosh u$		$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+9}}\,dx$ $(x = 3 \cdot \sinh u)$
(H) $\int R\left(x; \sqrt{x^2-a^2}\right)dx$ R: Rationale Funktion von x und $\sqrt{x^2-a^2}$	$x = a \cdot \cosh u$ $dx = a \cdot \sinh u\,du$ $\sqrt{x^2-a^2} = a \cdot \sinh u$		$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-25}}\,dx$ $(x = 5 \cdot \cosh u)$

Tabelle (Fortsetzung)

Integraltyp	Substitution	Neues Integral bzw. Lösung	Beispiel
(I) $\int R(\sin x; \cos x)\, dx$ R: Rationale Funktion von $\sin x$ und $\cos x$	$u = \tan(x/2)$ $dx = \frac{2}{1+u^2}\, du$ $\sin x = \frac{2u}{1+u^2}$ $\cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}$		$\int \frac{1+\cos x}{\sin x}\, dx$
(J) $\int R(\sinh x; \cosh x)\, dx$ R: Rationale Funktion von $\sinh x$ und $\cosh x$	$u = e^x, \ dx = \frac{du}{u}$ $\sinh x = \frac{u^2-1}{2u}$ $\cosh x = \frac{u^2+1}{2u}$		$\int \frac{\sinh x + 1}{\cosh x}\, dx$

■ **Beispiel**

$$\int_0^{\pi/2} \sin^4 x \cdot \cos x \, dx = ?$$

Integraltyp (C): $\int [f(x)]^n \cdot f'(x)\, dx$ mit $f(x) = \sin x$, $f'(x) = \cos x$ und $n = 4$

Substitution: $u = \sin x, \quad \frac{du}{dx} = \cos x, \quad dx = \frac{du}{\cos x}$

Untere Grenze: $x = 0 \quad \Rightarrow \quad u = \sin 0 = 0$

Obere Grenze: $x = \pi/2 \quad \Rightarrow \quad u = \sin(\pi/2) = 1$

Integration: $$\int_0^{\pi/2} \sin^4 x \cdot \cos x\, dx = \int_0^1 u^4 \cdot \cos x \frac{du}{\cos x} = \int_0^1 u^4\, du = \left[\frac{1}{5} u^5\right]_0^1 = \frac{1}{5}$$ ■

3.2 Partielle Integration (Produktintegration)

Die Formel der *partiellen Integration* lautet:

$$\int u(x) \cdot v'(x)\,dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x)\,dx$$

In vielen Fällen läßt sich ein (unbestimmtes) Integral $\int f(x)\,dx$ mit Hilfe dieser Formel wie folgt lösen. Der Integrand $f(x)$ wird in „geeigneter" Weise in ein *Produkt* aus zwei Funktionen $u(x)$ und $v'(x)$ zerlegt: $f(x) = u(x) \cdot v'(x)$. Dabei ist $v'(x)$ die erste Ableitung einer zunächst noch *unbekannten* Funktion $v(x)$. Dann gilt nach obiger Formel:

$$\int f(x)\,dx = \int u(x) \cdot v'(x)\,dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x)\,dx$$

Die Integration gelingt, wenn sich eine *Stammfunktion* zum „kritischen" Faktor $v'(x)$ angeben läßt *und* das neue Integral der rechten Seite *elementar lösbar* ist.

Anmerkungen

(1) In einigen Fällen muß man *mehrmals* hintereinander partiell integrieren, ehe man auf ein *Grundintegral* stößt.

(2) Die Formel der *partiellen Integration* gilt sinngemäß auch für *bestimmte* Integrale:

$$\int_a^b u(x) \cdot v'(x)\,dx = [u(x) \cdot v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x) \cdot v(x)\,dx$$

■ **Beispiel**

$\int x \cdot \cos x\,dx = ?$

Zerlegung des Integranden $f(x) = x \cdot \cos x$ in zwei Faktoren $u(x)$ und $v'(x)$:

$$u(x) = x, \qquad v'(x) = \cos x \quad \Rightarrow \quad u'(x) = 1, \qquad v(x) = \sin x$$

Partielle Integration:

$$\int \underbrace{x}_{u} \cdot \underbrace{\cos x}_{v'}\,dx = \underbrace{x}_{u} \cdot \underbrace{\sin x}_{v} - \int \underbrace{1}_{u'} \cdot \underbrace{\sin x}_{v}\,dx =$$

$$= x \cdot \sin x - \underbrace{\int \sin x\,dx}_{\text{Grundintegral}} = x \cdot \sin x + \cos x + C$$

■

3.4 Integration durch Potenzreihenentwicklung des Integranden

Der Integrand $f(x)$ des bestimmten oder unbestimmten Integrals wird in eine *Potenzreihe* entwickelt und anschließend *gliedweise* integriert (Voraussetzung: Der Integrationsbereich liegt *innerhalb* des Konvergenzbereiches der Reihe).

■ **Beispiel**

$$\int_0^1 \cos\left(\sqrt{x}\right) dx = ?$$

Potenzreihe (Mac Laurinsche Reihe) für $\cos z$ (siehe VI.3.4):

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + - \ldots \qquad (|z| < \infty)$$

Substitution $z = \sqrt{x}$:

$$\cos\left(\sqrt{x}\right) = 1 - \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{4!} - \frac{x^3}{6!} + - \ldots \qquad (|x| < \infty)$$

Gliedweise Integration:

$$\int_0^1 \cos\left(\sqrt{x}\right) dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{4!} - \frac{x^3}{6!} + - \ldots\right) dx =$$

$$= \left[x - \frac{x^2}{2 \cdot 2!} + \frac{x^3}{3 \cdot 4!} - \frac{x^4}{4 \cdot 6!} + - \ldots\right]_0^1 =$$

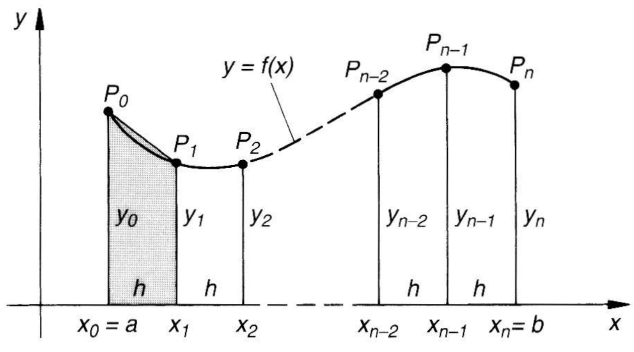
$$= 1 - \frac{1}{2 \cdot 2!} + \frac{1}{3 \cdot 4!} - \frac{1}{4 \cdot 6!} + - \ldots \approx 0{,}763 \text{ (auf drei Nachkommastellen genau)}$$

■

3.5 Numerische Integration

3.5.1 Trapezformel

Die Fläche unter der Kurve $y = f(x)$ wird zunächst in n Streifen *gleicher* Breite h zerlegt, dann wird in jedem Streifen die krummlinige Begrenzung durch die *Sekante* ersetzt (der „Ersatzstreifen" besitzt die Form eines *Trapezes*, im Bild grau unterlegt):



$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \left(\frac{1}{2}\,y_0 + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1} + \frac{1}{2}\,y_n\right) h =$$

$$= \left(\frac{1}{2}\,\underbrace{(y_0 + y_n)}_{\Sigma_1} + \underbrace{(y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1})}_{\Sigma_2}\right) h = \left(\frac{1}{2}\cdot\Sigma_1 + \Sigma_2\right) h$$

Steifenbreite: $h = (b - a)/n$

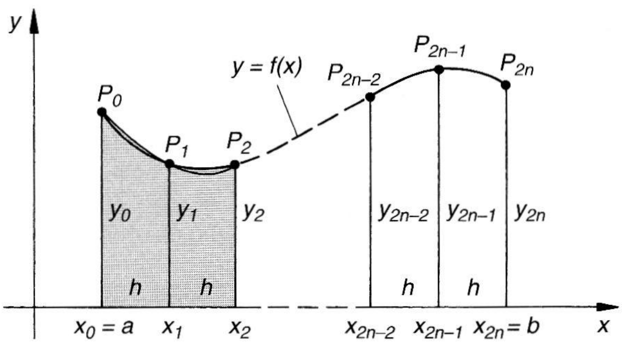
Stützstellen: $x_k = a + k \cdot h$

Stützwerte: $y_k = f(x_k)$

$\Big\}\; k = 0, 1, \ldots, n$

3.5.2 Simpsonsche Formel

Die Fläche unter der Kurve $y = f(x)$ wird in $2n$, d. h. in eine *gerade* Anzahl „einfacher" Streifen *gleicher* Breite h zerlegt. In jedem „Doppelstreifen" (er besteht aus *zwei aufeinanderfolgenden* „einfachen" Streifen, die im Bild *grau* unterlegt sind) ersetzt man dann die krummlinige Begrenzung durch eine *Parabel*:



$$\int_a^b f(x)\,dx \approx (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \ldots + 2y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n})\,\frac{h}{3} =$$

$$= \left(\underbrace{(y_0 + y_{2n})}_{\Sigma_0} + 4\,\underbrace{(y_1 + y_3 + \ldots + y_{2n-1})}_{\Sigma_1} + 2\,\underbrace{(y_2 + y_4 + \ldots + y_{2n-2})}_{\Sigma_2}\right)\frac{h}{3} =$$

$$= \left(\Sigma_0 + 4\cdot\Sigma_1 + 2\cdot\Sigma_2\right)\frac{h}{3}$$

Breite eines *einfachen* Streifens: $h = (b - a)/2n$

Stützstellen: $x_k = a + k \cdot h$

Stützwerte: $y_k = f(x_k)$

$\Big\}\; k = 0, 1, \ldots, 2n$

Beispielaufgaben zur Integration von Funktionen mit einer Variablen

bestimmte Integrale

$$I = \int_1^2 \left(x^3 - 2x^2 + 5\right) dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{2}{3}x^3 + 5x\right]_1^2 = \frac{49}{12}$$

$$I = \int_0^\pi sin(x)\, dx = -cos(x)\Big|_0^\pi = 2$$

$$I = \int_0^\pi 4cos(x)\, dx = 4sin(x)\Big|_0^\pi = 0 \quad \text{Achtung! Nulldurchgang im Ingetrationsintervall!}$$

$$I = \int_0^\pi 4cos(x)\, dx = \left|\int_0^{\frac{\pi}{2}} 4cos(x)\, dx\right| + \left|\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 4cos(x)\, dx\right| = 8$$

$$I = \int_0^1 \left(3e^x - 2x\right) dx = \left[3e^x - x^2\right]_0^1 = 3\left(e^1 - e^0\right) - 1 = 3(e-1) - 1 = 4{,}1548$$

$$I = \int_2^2 \frac{2}{x}\, dx = 2\,ln(|x|)\Big|_2^2 = 2(0{,}693 - 0{,}693) = 0$$

$$A = A_1 + A_2 = \int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 (-x+2)\, dx = \frac{x^3}{3}\Bigg|_0^1 - \left(\frac{x^2}{2} + 2x\right)\Bigg|_1^2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$$

unbestimmte Integrale, Integrationsmethoden

Suche nach einer geeigneten Substitution die zu einer Vereinfachung des Integrals führt, im Idealfall auf ein „Grundintegral“. Hinweise zu geeigneten Substitutionen findet man in vielen Nachschlagewerken. Bei der unbestimmten Integration gibt es immer eine Integrationskonstante die aus weiteren Bedingungen zu bestimmen ist.

$$I = \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$$

Substitution $x = sin(u) \qquad \frac{dx}{du} = cos(u) \qquad \sqrt{1-x^2} = cos(u)$

$$I = \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \int \frac{sin(u)}{cos(u)} cos(u)\, du = -cos(u) + C$$

$$= -\sqrt{1-x^2} + C$$

$$I = \int \frac{6x^2}{\left(1-4x^3\right)^3}\, dx$$

Substitution $u = 1 - 4x^3 \qquad \frac{du}{dx} = -12x^2$

$$I=\int\frac{6x^2}{\left(1-4x^3\right)^3}\,dx=\int\frac{6x^2}{u^3}\,\frac{du}{-12x^2}=-\frac{1}{2}\int\frac{du}{u^3}=\frac{1}{4}\frac{1}{u^2}+C$$
$$=\frac{1}{4}\frac{1}{\left(1-4x^3\right)^2}+C$$

$$I=\int\frac{3x^2-6}{x^3-6x+1}dx$$ Typ $\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx$

Substitution $u=x^3-6x+1$ $\quad\frac{du}{dx}=3x^2-6$

$$I=\int\frac{3x^2-6}{x^3-6x+1}dx=\int\frac{3x^2-6}{u}\,\frac{du}{3x^2-6}=ln(|u|)+C$$
$$=ln\left(\left|x^3-6x+1\right|\right)+C$$

$$I=\int\frac{e^x}{e^x+a}dx$$

Substitution $u=e^x+a$ $\quad\frac{du}{dx}=e^x$

$$I=\int\frac{e^x}{e^x+a}dx=\int\frac{e^x}{u}\,\frac{du}{e^x}=ln(|u|)+C$$
$$=ln\left(\left|e^x+a\right|\right)+C$$

$$I=\int\left(a+\frac{x}{b}\right)^{n+1}dx$$

Substitution $u=a+\frac{x}{b}$ $\quad\frac{du}{dx}=\frac{1}{b}$

$$I=\int\left(a+\frac{x}{b}\right)^{n+1}dx=\int(u)^{n+1}b\,du=\frac{b}{n+2}(u)^{n+2}+C$$
$$=\frac{b}{n+2}\left(a+\frac{x}{b}\right)^{n+2}+C$$

$$I=\int\frac{ln(x)}{x}dx$$ Typ $\int f(x)f'(x)\,dx$

Substitution $u=ln(x)$ $\quad\frac{du}{dx}=\frac{1}{x}$

$$I=\int\frac{ln(x)}{x}dx=\int\frac{u}{x}\,x\,du=\frac{u^2}{2}+C$$
$$=\frac{(ln(x))^2}{2}+C$$

$$I=\int sin(x)cos(x)dx$$

Substitution $u=sin(x)$ $\quad\frac{du}{dx}=cos(x)$

$$I = \int sin(x)cos(x)dx = \int u\, cos(x)\frac{du}{cos(x)}$$

$$= \frac{1}{2} sin^2(x) + C_1$$

$$= -\frac{1}{2} cos^2(x) + C_2 \qquad \text{bei anderer Substitution}$$

$$I = \int cos(2x)\, dx$$

Substitution $u = 2x \qquad \frac{du}{dx} = 2$

$$I = \int cos(2x)\, dx = \int cos(u)\frac{du}{2} = \frac{1}{2} sin(u) + C$$

$$= \frac{1}{2} sin(2x) + C$$

$$I = \int \sqrt[3]{a - bx}\; dx$$

Substitution $u = a - bx \qquad \frac{du}{dx} = -b$

$$I = \int \sqrt[3]{a - bx}\; dx = \int (a - bx)^{\frac{1}{3}}\; dx = \int (u)^{\frac{1}{3}}\; \frac{du}{-b}$$

$$= -\frac{1}{b}\frac{3}{4}u^{\frac{4}{3}} + C = -\frac{1}{b}\frac{3}{4}(a - bx)^{\frac{4}{3}} + C = -\frac{3}{4}\frac{\sqrt[3]{(a - bx)^4}}{b} + C$$

$$I = \int \frac{x^3}{3x^4 - 2} dx$$

Substitution $u = 3x^4 - 2 \qquad \frac{du}{dx} = 12x^3$

$$I = \int \frac{x^3}{3x^4 - 2} dx = \int \frac{x^3}{u}\frac{du}{12x^3} = \frac{1}{12}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{12} ln(|u|) + C$$

$$= \frac{1}{12} ln(|3x^4 - 2|) + C$$

Integration gebrochen rationaler Funktionen mit Partialbruchzerlegung

$\Rightarrow$ wird hier nicht behandelt

partielle Integration, Umkehrung der Produktregel der Differentiation

$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$ integrieren liefert $\int (u \cdot v)' = u \cdot v = \int u' \cdot v + \int u \cdot v'$

Daraus ergibt sich die Rechenvorschrift $\int u' \cdot v = u \cdot v - \int u \cdot v'$ oder $\int u \cdot v' = u \cdot v - \int u' \cdot v$.

Bei einer „ungeschickten" Wahl von u und v' kann sich das Problem verschlimmern.

$$I = \int x\, e^x dx$$

Variante 1 $\qquad u = x \quad u' = 1$

$\qquad v = e^x \quad v' = e^x$

$$I=\int x\,e^x dx = x\,e^x-\int 1\,e^x dx = x\,e^x-e^x+C$$

Variante 2
$$u'=x \quad u=\frac{x^2}{2}$$
$$v=e^x \quad v'=e^x$$

$$I=\int x\,e^x dx=\frac{x^2}{2}\,e^x-\int\frac{x^2}{2}\,e^x dx$$

Es ist kein Grundintegral entstanden; das Problem ist so nicht lösbar.

$$I=\int x^2\cos(x)\,dx \qquad u=x^2 \quad u'=2x$$
$$v'=\cos(x) \quad v=\sin(x)$$

$$I=\int x^2\cos(x)\,dx=x^2\sin(x)-2\int x\sin(x)\,dx$$

Es ist noch kein Grundintegral entstanden; es ist eine weitere partielle Integration erforderlich.

$$\int x\sin(x)\,dx=-x\cos(x)-\int(-\cos(x))\,dx=-x\cos(x)+\sin(x)+C_1$$

$$I=\int x^2\cos(x)\,dx=x^2\sin(x)-2(-x\cos(x)+\sin(x)+C_1)$$
$$=x^2\sin(x)+2x\cos(x)-2\sin(x)+C$$

Es gibt Fälle, in denen nie ein Grundintegral entsteht.

$$I=\int\sin(x)\cos(x)\,dx \qquad u=\sin(x) \quad u'=\cos(x)$$
$$v'=\cos(x) \quad v=\sin(x)$$

$$I=\int\sin(x)\cos(x)\,dx=\sin^2(x)-\int\cos(x)\sin(x)\,dx$$
$$\int\sin(x)\cos(x)\,dx=\sin^2(x)-\int\cos(x)\sin(x)\,dx$$
$$2\int\sin(x)\cos(x)\,dx=\sin^2(x)$$
$$\int\sin(x)\cos(x)\,dx=\frac{1}{2}\sin^2(x)+C_1$$

Es entsteht bei der partiellen Integration das Ausgangsintegral.
$\Rightarrow$ „Rücklaufintegral“

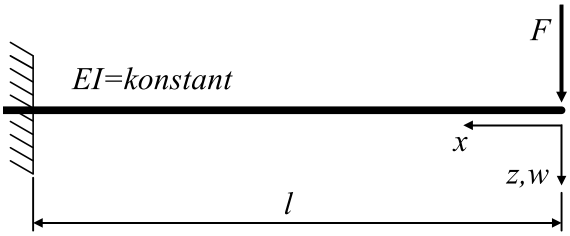
Bei anderer Wahl von u und v' ergibt sich $\int\sin(x)\cos(x)\,dx=-\frac{1}{2}\cos^2(x)+C_2$.

Die Konstanten sind nicht unabhängig voneinander.
$$\frac{1}{2}\sin^2(x)+C_1=-\frac{1}{2}\cos^2(x)+C_2$$
$$\sin^2(x)+\cos^2(x)=2(C_2-C_1)=1$$

Bei Integration in festen Grenzen (bestimmtes Integral) ist $\frac{1}{2}\sin^2(x)\Big|_a^b=-\frac{1}{2}\cos^2(x)\Big|_a^b$.

Anwendungen der Integralrechnung

Berechnung der Durchbiegung eines einseitig eingespannten Trägers der durch eine Kraft F am freien Trägerende belastet ist.



Gegeben: Kraft F
Balkenlänge l
Materialkonstante E (Elastizitätsmodul)
Querschnittswert I (axiales Flächenträgheitsmoment)

Das Biegemoment im Träger in Abhängigkeit von der Koordinate x ist $M_b(x) = -F\,x$.
Es gilt die Differentialgleichung der Biegelinie $EIw''(x) = -M_b(x)$.

$$EIw''(x) = EI\frac{d^2w}{dx^2} = -M_b(x) = F\,x$$

$$EIw'(x) = EI\frac{dw}{dx} = \frac{1}{2}F\,x^2 + C_1$$

$$EIw(x) = \frac{1}{6}F\,x^3 + C_1x + C_2$$

Die bei der unbestimmten Integration entstandenen Konstanten müssen aus Ranbedingungen bestimmt werden. Das sind Aussagen geometrischer Art an bestimmten Stellen des Tragwerkes.
In der Einspannung (Träger z.B. eingemauert) ist keine Verschiebung w und keine Verdrehung w' des Trägers möglich.

Bedingungen: $w(x=l)=0$ Verschiebung
$w'(x=l)=0$ Neigung der Tangente an den Träger

Auswertung:

$$0 = \frac{1}{2}F\,l^2 + C_1 \qquad C_1 = -\frac{1}{2}F\,l^2$$

$$0 = \frac{1}{6}F\,l^3 + C_1l + C_2 \qquad C_2 = -\frac{1}{6}F\,l^3 + \frac{1}{2}F\,l^3 = \frac{1}{3}F\,l^3$$

Biegelinie

$$w(x) = \frac{1}{EI}\left(\frac{1}{6}F\,x^3 - \frac{1}{2}F\,l^2x + \frac{1}{3}F\,l^3\right) = \frac{F\,l^3}{3EI}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{x}{l}\right)^3 - \frac{3}{2}\frac{x}{l} + 1\right)$$

Mit einigen Zahlenwerten ergibt sich folgende Verformung:

$l := 1 \cdot m$

$E := 2.06 \cdot 10^5 \cdot \dfrac{N}{mm^2}$

$F := 1000 \cdot N$

$b := 20 \cdot mm$

$h := 40 \cdot mm$

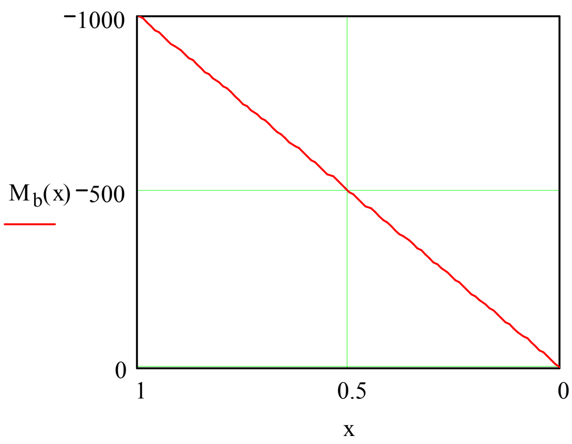
$I := \dfrac{b \cdot h^3}{12}$ $\qquad I = 1.06667 \times 10^5\ mm^4$

Biegemoment $\qquad M_b(x) := -F \cdot x$

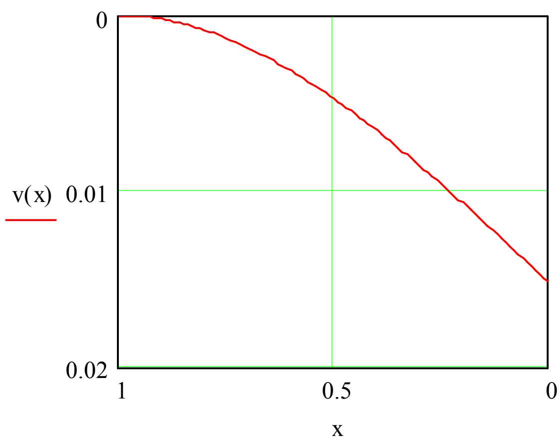
Verschiebung $\qquad v(x) := \dfrac{F \cdot l^3}{3 \cdot E \cdot I} \cdot \left[\dfrac{1}{2} \cdot \left(\dfrac{x}{l}\right)^3 - \dfrac{3}{2} \cdot \dfrac{x}{l} + 1\right]$ $\qquad v(0 \cdot m) = 15.1699\ mm$

Verschiebung unter der Kraft

$x := 0, \dfrac{1}{100} .. 1$



Verlauf des Biegemomentes



Verlauf der Verschiebung

Freier Fall unter Berücksichtigung des Luftwiderstandes

In diesem Fall gilt folgende Äquivalenzbeziehung für die Kräfte in vertikaler Richtung:

$$\downarrow \quad m\ddot{x} = mg - k\,\dot{x}^2$$

Dabei ist $F_W = k\,\dot{x}^2 = \frac{1}{2}\rho\, c_W A\,\dot{x}^2$. Im einzelnen bedeuten:

$$\begin{array}{ll} x & Fallweg \\ m & Masse \\ g & Gravitationskonstante \\ \rho & Dichte\ des\ umgebenden\ Mediums\ (z.B.\ Luft) \\ c_W & formabhängiger\ Widerstandsbeiwert \\ A & angeströmte\ Fläche \end{array}$$

Damit ergibt sich folgende Differentialgleichung:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \dot{v} = g - \frac{k}{m}v^2$$

Nach Trennung der Variablen lässt sich diese DGL durch Integration lösen.

$$\frac{dv}{g - \frac{k}{m}v^2} = dt$$

Wir erhalten als Lösung (z.B. aus Integraltafeln im Taschenbuch der Mathematik)

$$\frac{m}{\sqrt{mgk}}\,arctan\,h\left(\frac{kv}{\sqrt{mgk}}\right) = t + C_1$$

Die Integrationskonstante bestimmen wir aus der Anfangsbedingung $v(t=0)=0$ zu $C_1 = 0$. Diese Gleichung wird nach der Geschwindigkeit umgestellt.

$$\frac{kv}{\sqrt{mgk}} = tanh\left(t\,\frac{\sqrt{mgk}}{m}\right)$$

$$\dot{x} = v = \sqrt{\frac{mg}{k}}\,tanh\left(t\,\sqrt{\frac{gk}{m}}\right)$$

Eine weitere Integration liefert den Fallweg.

$$x = \int v(t)\,dt = \frac{m}{k}\,ln\left(cosh\left(t\,\sqrt{\frac{gk}{m}}\right)\right) + C_2$$

Mit der Anfangsbedingung $x(t=0)=0$ ergibt sich $C_2 = 0$.

Werden die Wirkungen des Luftwiderstandes vernachlässigt, gelten folgende Beziehungen bei homogenen Anfangsbedingungen:

$$\ddot{x} = g \qquad \dot{x} = v = gt \qquad x = vt = \frac{1}{2}gt^2$$

Eine grafische Auswertung der Gleichungen zeigt, dass bei Berücksichtigung des Luftwiderstandes nach kurzer Zeit die Fallgeschwindigkeit (eines Fallschirmspringers) nur noch minimal ansteigt.

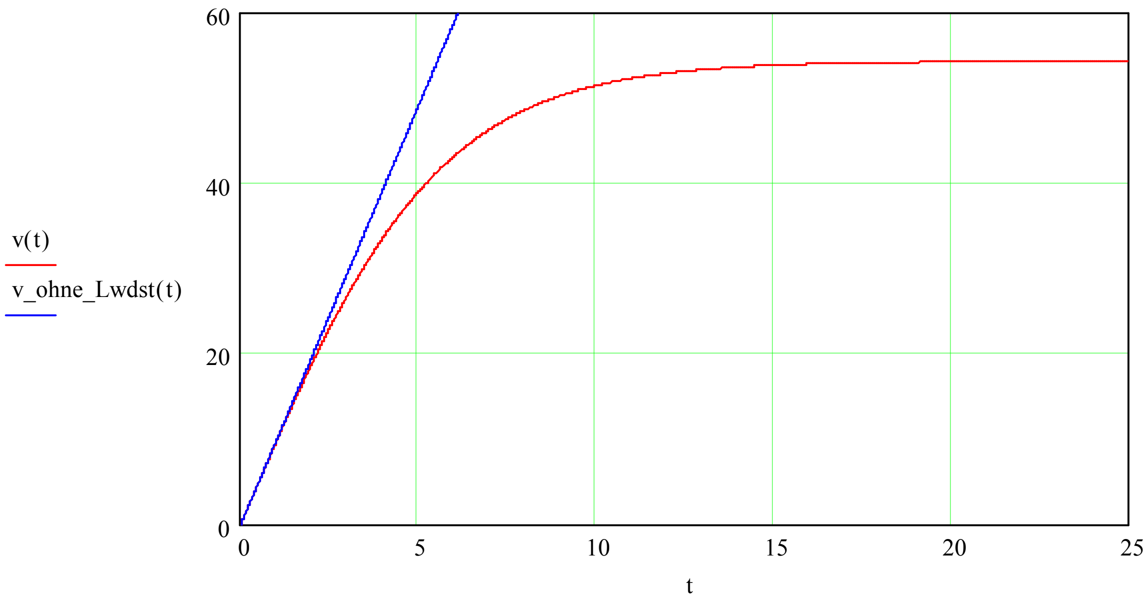
$k := 0.3 \cdot \frac{kg}{m}$ (Wert für einen Menschen)

$\text{Masse} := 90 \cdot kg$

$g := 9.81 \cdot \frac{m}{s^2}$

$t := 0 \cdot s, 0.01 \cdot s .. 25 \cdot s$

$v(t) := \sqrt{\frac{\text{Masse} \cdot g}{k}} \cdot \tanh\left(\sqrt{\frac{k \cdot g}{\text{Masse}}} \cdot t\right)$ $\qquad$ $v\_ohne\_Lwdst(t) := g \cdot t$



Geschwindigkeiten zu ausgewählten Zeitpunkten:

$v(1 \cdot s) = 9.70445\ m\,s^{-1}$	$v(1 \cdot s) = 34.93602\ km \cdot h^{-1}$
$v(2 \cdot s) = 18.80707\ m\,s^{-1}$	$v(2 \cdot s) = 67.70547\ km \cdot h^{-1}$
$v(5 \cdot s) = 38.96823\ m\,s^{-1}$	$v(5 \cdot s) = 140.28562\ km \cdot h^{-1}$
$v(10 \cdot s) = 51.41002\ m\,s^{-1}$	$v(10 \cdot s) = 185.07608\ km \cdot h^{-1}$
$v(20 \cdot s) = 54.17113\ m\,s^{-1}$	$v(20 \cdot s) = 195.01606\ km \cdot h^{-1}$
$v(30 \cdot s) = 54.24732\ m\,s^{-1}$	$v(30 \cdot s) = 195.29035\ km \cdot h^{-1}$