Lineare Gleichungssysteme mit zwei Grundvariablen

Allgemeine Form: (1) $a_1x + b_1y = c_1$
(2) $a_2x + b_2y = c_2$ *Variablen:* $x,y \in R$
Koeffizienten: $a_1,a_2,b_1,b_2 \in R$

andere Schreibweise:

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

Lösungsstrategie: Einsetzungs-, Gleichsetzungs- und Additionsverfahren (gegebenenfalls vorherige Erweiterung)

Beispiel (Aufgabe 17)

Einsetzungsverfahren**:**

$$\textbf{(1)} \quad x + y = -3 \quad \Rightarrow \quad y = -3 - x \quad \text{in (2) eingesetzt}$$

$$\textbf{(2)} \quad y - 2x = 6 \quad \Rightarrow \quad -3 - x - 2x = 6 \quad \Rightarrow \quad -3x = 9 \quad \Rightarrow \quad x = -3$$

$$y = -3 - x = -3 - (-3) = 0, \qquad L = \{-3, 0\}$$

oder

$$\textbf{(1)} \quad x + y = -3$$

$$\textbf{(2)} \quad y - 2x = 6 \quad \Rightarrow \quad y = 6 + 2x \quad \text{in } \textbf{(1)} \text{ eingesetzt}$$

$$x + 6 + 2x = -3 \quad \Rightarrow \quad 3x = -9 \quad \Rightarrow \quad x = -3$$

$$y = 6 + 2 \cdot (-3) = 0$$

oder Gleichsetzungsverfahren:

$$\textbf{(1)} \quad x + y = -3 \quad \Rightarrow \quad \textbf{(1)}' \quad y = -3 - x$$

$$\textbf{(2)} \quad y - 2x = 6 \quad \Rightarrow \quad \textbf{(1)}' \quad y = 6 + 2x$$

$$\textbf{(1)}' = \textbf{(2)}' \quad \Rightarrow \quad -3 - x = 6 + 2x \quad \Rightarrow \quad -3x = 9 \quad \Rightarrow \quad x = -3$$

$$y = -3 - (-3) = 6 + 2 \cdot (-3) = 0$$

oder Additionsverfahren:

$$\left.\begin{array}{ll} \textbf{(1)} & x + y = -3 \\ \textbf{(2)} & -2x + y = 6 \end{array}\right| \textbf{(1)} - \textbf{(2)} \quad \Rightarrow \quad 3x = -9 \quad \Rightarrow \quad x = -3 \quad y = 0$$

oder

$$\left.\begin{array}{lll} \textbf{(1)} & x + y = -3 & | \cdot 2 \\ \textbf{(2)} & -2x + y = 6 & \end{array}\right| \textbf{(1)} + \textbf{(2)} \quad \Rightarrow \quad 3y = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0 \quad x = -3$$

Probe**:** $\quad -3 + 0 = -3 \qquad 6 + 0 = 6 \qquad -3 \in R \qquad 0 \in R$

Beispiel (Aufgabe 17)- Einsetzungsverfahren

(1) $x-2y=\ 4 \quad\Rightarrow\quad x=4+2y$ einsetzen in (2)

(2) $2x+5y=35 \quad\Rightarrow\quad 8+4y+5y=35$

$$9y=27 \quad y=3$$

$$x=4+6=10 \qquad L=\{10,3\}$$

Beispiel (Aufgabe 17)- Additionsverfahren

$$\left.\begin{array}{llll} (1) & 12x-\ 8y=4 & \left|\cdot 3\right. & \Rightarrow\quad 36x-24y=12 \\ (2) & 18x-15y\ =3 & \left|\cdot(-2)\right. & \Rightarrow\quad -36x+30y=-6 \end{array}\right| + \quad\Rightarrow 6y=6$$

$$y=1$$

$$12x-8\cdot 1=4$$

$$x=1 \qquad L=\{1,1\}$$

Beispiel:

(1) $4y(10x-3)-5x(8y+7)+165=0$

(2) $9x(4y-7)+3y(5-12x)=-114$

(1) $40xy-12y-40xy-35x+165=0$

(2) $36xy-63x+15y-36xy=-114$

(1′) $-35x-12y=-165 \;\left|\cdot 5\right.$

(2′) $-63x+15y=-114 \left|\cdot 4\right.$

$$\left.\begin{array}{ll} (1'') & -175x-60y=-825 \\ (2'') & -252x+60y=-456 \end{array}\right| + \quad\Rightarrow\quad -427x=-1281 \quad\Rightarrow\quad x=3 \quad \text{in } (1')$$

$$-35\cdot 3-12y=-165 \quad\Rightarrow -12y=-60$$

$$y=5 \qquad L=\{3,5\}$$

Beispiel:

(1) $\dfrac{x+y+1}{x+y-1}=\dfrac{3}{2}$ (2) $\dfrac{x-y+1}{x+y+1}=\dfrac{1}{3}$ (Nenner müssen $\neq 0$ sein!)

(1′) $2x+2y+2=3x+3y-3 \quad\Rightarrow\quad x+y=5 \quad\Rightarrow\quad x=5-y$

(2′) $3x-3y+3=x+y+1 \quad\Rightarrow\quad 2x-4y=-2$ hier x einsetzen!

$$10-2y-4y=-2$$

$$-6y=-12$$

$y=2 \quad\Rightarrow\quad x=5-y=3,\quad L=\{3,2\},$ Nenner $\neq 0$ erfüllt!

Lösbarkeit von linearen Gleichungssystemen mit 2 Variablen

Jede Gleichung kann als eine Geradengleichung angesehen werden.

- eindeutig lösbar $\Rightarrow$ linear unabhängig und widerspruchsfrei Gleichungen (zwei einander schneidende Geraden, ein Schnittpunkt)

(1) $\quad x + y = 2a$

(2) $\quad x - y = 2b$

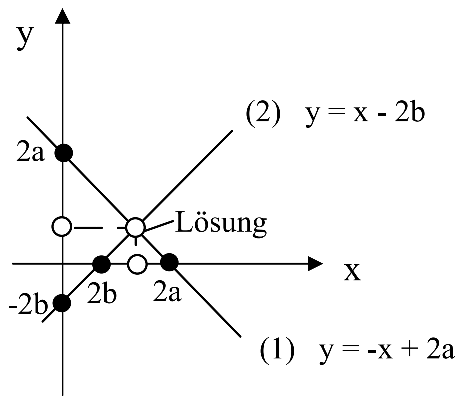
(1) + (2) $\quad 2x = 2(a + b)$

$\quad x = a + b$

(1) − (2) $\quad 2y = 2(a - b)$

$\quad y = a - b$

$L = \{a + b; a - b\}$



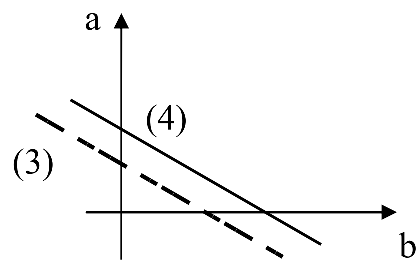
- keine Lösung $\Rightarrow$ widersprüchliche Gleichungen (zwei parallele nicht zusammenfallende Geraden, kein gemeinsamer Schnittpunkt)

(3) $\quad 4a + 3b = 7$

(4) $\quad 4(a - 2) = -3b$

(3′) $\quad 4a + 3b = 7$

(4′) $\quad 4a + 3b = 8$



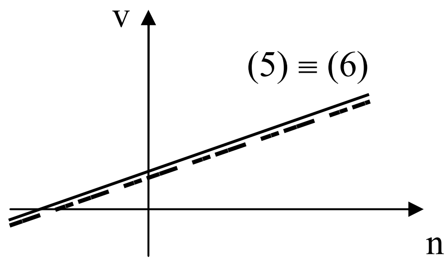
- unendlich viele Lösungen $\Rightarrow$
linear abhängige Gleichungen (zwei zusammenfallende Geraden mit unendlich vielen gemeinsamen „Schnittpunkten")

(5) $\quad v - \frac{2n}{3} = 1 \;\Big|\cdot 3$

(6) $\quad 6v - 6 = 4n \;\Big|\cdot \frac{1}{2}$

(5′) $\quad 3v - 2n = 3$

(6′) $\quad 3v - 2n = 3$



Grafische Lösung von linearen Gleichungen und linearen Gleichungssystemen mit 2 Variablen

Gleichung: $ax + b = 0$ mit $a \neq 0$

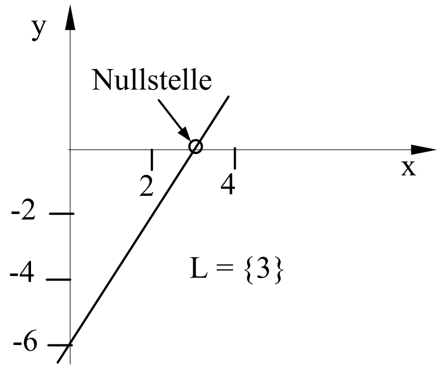
Vorgehensweise: $\Rightarrow$ Funktion der Gleichung: $y = ax+b$

Das Bild der Funktion ist eine Gerade.

Beispiel für eine Gleichung:

$2x - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 2x - 6$

Die Nullstelle der Funktion ist die Lösung der Gleichung.

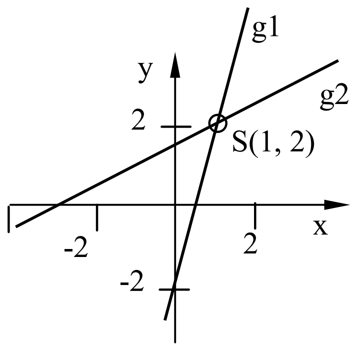


Beispiele für ein System zweier linearer Gleichungen:

(g1) $4x - y = 2 \quad \Rightarrow \quad y = 4x - 2$

(g2) $x - 2y = -3 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{x}{2} + \frac{3}{2}$

$L = \{1, 2\}$

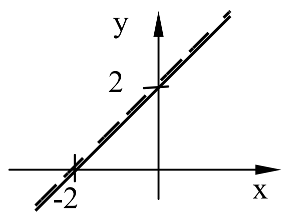


Der Schnittpunkt der Funktion ist die Lösung der beiden Gleichungen.

(1) $-x + y = 2 \quad \Rightarrow y = x+2$

(2) $-3x + 3y = 6 \quad \Rightarrow y = x+2$

linear abhängig (unendlich viele Schnittpunkte und Lösungen)



(1) $y + 3x = 3 \quad \Rightarrow \quad y = -3x + 3$

(2) $y + 3x = -2 \quad \Rightarrow \quad y = -3x - 2$

keine Lösung (Widerspruch)