Lineare Gleichungssysteme

Lineare Gleichung mit n Variablen:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$$

a_i – Koeffizienten, b – absolutes Glied (Zahlen)

Lineares Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

Homogene Gleichungssysteme: alle $\mathbf{b_i = 0}$ (triviale Lösung $x_i = 0$)
Inhomogene Gleichungssysteme: mindestens ein $\mathbf{b_i \neq 0}$

Matrizenschreibweise: **Ax = b**

A - Koeffizientenmatrix
x - Vektor der Unbekannten
b - Vektor der rechten Seiten

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Die Lösungsmöglichkeiten wie bei 2 Gleichungen mit 2 Unbekannten lassen sich prinzipiell auch für n > 2 anwenden, sind aber ab n > 4 oft unübersichtlich und uneffektiv.

Alternative ➡ ***Gaußalgorithmus*** und seine Modifikationen (leicht zu programmieren)

Gauß-Jordan-Algorithmus für die Handrechnung:

Umformen des Gleichungssystems durch fortgesetzte Multiplikation mit Faktoren und Addition von Gleichungen so, dass eine Koeffizientenmatrix in Dreiecksform entsteht.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \bar{a}_{22} & \bar{a}_{23} & \cdots & \bar{a}_{2n} \\ 0 & 0 & \bar{a}_{33} & \cdots & \bar{a}_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \bar{a}_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \bar{b}_2 \\ \bar{b}_3 \\ \vdots \\ \bar{b}_n \end{bmatrix}$$

Aus dieser Form lassen sich in einfacher Weise die x_i von unten nach oben ausrechnen.

$$x_n = \frac{\bar{b}_n}{\bar{a}_{n,n}} \qquad x_{n-1} = \frac{\bar{b}_{n-1} - \bar{a}_{n,n} x_n}{\bar{a}_{n-1,n-1}} \qquad \cdots$$

Beispiel mit 3 Gleichungen:

$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2$
$x_1 + x_2 + x_3 = 2$
$3x_1 + 3x_2 + x_3 = 0$

Matizenschreibweise:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Rechenschema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \cdot(-1) \; + \quad \cdot(-3) \; +$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -6 \end{bmatrix} \quad \cdot(-3) \; +$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -6 \end{bmatrix}$$

Umgeformtes Gleichungssystem

$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2$
$- x_2 - 2x_3 = 0$
$- 2x_3 = -6$

Lösung:

$-2x_3 = -6$	$x_3 = 3$
$-x_2 - 2x_3 = -x_2 - 6 = 0$	$x_2 = -6$
$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = x_1 - 12 + 9 = 2$	$x_1 = 5$