Herleitung der CRAMERschen Regel mit Hilfe der Vektorrechnung

Gegeben sei ein lineares Gleichungssystem mit den Unbekannten x, y, z

$$\begin{aligned} a_1 x + b_1 y + c_1 z &= d_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z &= d_2 \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z &= d_3 \end{aligned}$$

Dieses System lässt sich auch in den folgenden Formen darstellen:

Vektordarstellung

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} z = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a}\, x + \mathbf{b}\, y + \mathbf{c}\, z = \mathbf{d}$$

Matrizendarstellung

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}\, \mathbf{x} = \mathbf{d}$$

Aus der vektoriellen Darstellung $\mathbf{a}\, x + \mathbf{b}\, y + \mathbf{c}\, z = \mathbf{d}$ und mit den Rechenregeln der Vektorrechnung für Kreuz- und Skalarprodukte ergibt sich:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})\, x + (\mathbf{b} \times \mathbf{b})\, y + (\mathbf{c} \times \mathbf{b})\, z = (\mathbf{d} \times \mathbf{b})$$

$(\mathbf{b} \times \mathbf{b}) = \mathbf{0}$, da Vektoren parallel zueinander (Kreuzprodukt ist Null)

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})\, x + (\mathbf{c} \times \mathbf{b})\, z = (\mathbf{d} \times \mathbf{b})$$

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\, x + (\mathbf{c} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\, z = (\mathbf{d} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$$

$(\mathbf{c} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) = 0$, da $(\mathbf{c} \times \mathbf{b})$ senkrecht zu $\mathbf{c}$ ist und das Skalarprodukt dieses Vektors mit $\mathbf{c}$ Null ist

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\, x = (\mathbf{d} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$$

Daraus ergibt sich die Rechenvorschrift zur Bestimmung der Unbekannten x.

$$x = \frac{(\mathbf{d} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{c})}{(\mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{c})} = \frac{D_1}{D}$$

Die übrigen Unbekannten ergeben sich zu $y = \frac{(\mathbf{a} \times \mathbf{d} \cdot \mathbf{c})}{(\mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{c})} = \frac{D_2}{D}$ und $z = \frac{(\mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{d})}{(\mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{c})} = \frac{D_3}{D}$.

Anmerkung:

Das Produkt $(\mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$ ist das Spatprodukt (gemischtes Kreuzprodukt). Es lässt sich als Determinante der entsprechenden Matrix berechnen.

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) = D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Das Kreuzprodukt $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ ist

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \begin{vmatrix} \mathbf{e_1} & \mathbf{e_2} & \mathbf{e_3} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$