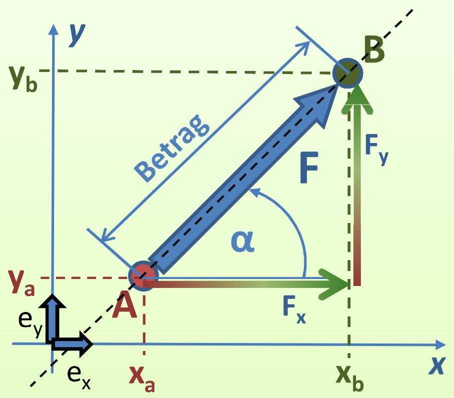
7. Einführung in die Vektorrechnung

Was ist ein Vektor? (Betrachtung in der Ebene)

Vektoren sind meist physikalische Größen, wie Weg, Geschwindigkeit, Beschleunigung, Kraft und Moment. Sie sind gerichtete Größen , die vom Punkt A zum Punkt B zeigen. Die Strecke zwischen A und B ist der ***Betrag***, der Winkel α zwischen positiver x-Achse und dem Vektor ist die ***Richtung*** und die Pfeilspitze der ***Richtungssinn*** des Vektors. Die Gerade, die durch die Punkte A und B geht, wird als ***Wirkungslinie*** und der Punkt A als ***Angriffspunkt*** des Vektors bezeichnet. Von A aus kann der Punkt B entweder direkt über den Vektor **F** oder indirekt über seine ***Komponenten*** $\mathbf{F_x}$ und $\mathbf{F_y}$ erreicht werden. Die Komponenten beziehen sich ***immer*** auf das verwendete Koordinatensystem mit seinen ***Einheitsvektoren*** $\mathbf{e}_x$ und $\mathbf{e}_y$, deren Beträge 1 sind. Vektor und Komponenten bilden ***stets*** ein ***rechtwinkliges Dreieck***, so dass die mathematischen Beziehungen im rechtwinkligen Dreieck gelten.

Vektoren werden mit ***fett gedruckten Buchstaben*** oder mit ***Unterstrich*** (**F** oder <u>F</u>) und ihre Beträge mit normal oder kursiv gedruckten Buchstaben (|**F**| = F = *F*) bezeichnet.



Pythagoras: $F^2 = F_x^{\,2} + F_y^{\,2}$

Trigonometrie: $\tan\alpha = F_y / F_x$

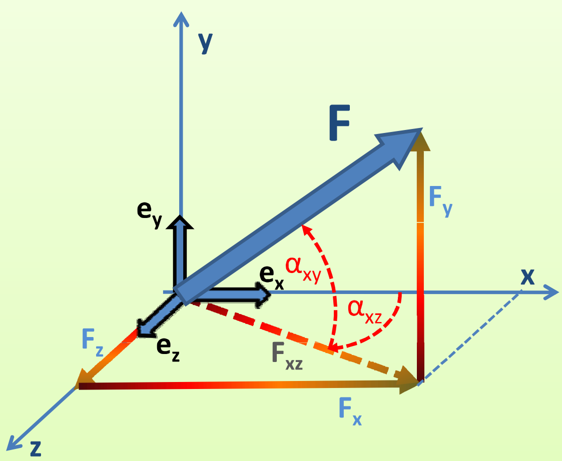
$F_x = F \cdot \cos\alpha$

$F_y = F \cdot \sin\alpha$

Komponentenschreibweise:

$\mathbf{F} = F_x \cdot \mathbf{e_x} + F_y \cdot \mathbf{e_y}$ kurz: $\mathbf{F} = \{ F_x , F_y \}$

Erweiterung auf den Raum



Pythagoras: $F^2 = F_x^{\,2} + F_y^{\,2} + F_z^{\,2}$

$F^2_{xz} = F_x^{\,2} + F^2_z$

$F^2 = F^2_{xz} + F_y^{\,2}$

Trigonometrie: $\tan \alpha_{xz} = F_z / F_x$

$\tan \alpha_{xy} = F_y / F_{xz}$

$F_x = F_{xz} \cdot \cos \alpha_{xz}$

$F_y = F \cdot \sin \alpha_{xy}$

$F_z = F_{xz} \cdot \sin \alpha_{xz}$

Komponentenschreibweise:

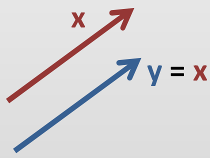
$\mathbf{F} = F_x \cdot \mathbf{e_x} + F_y \cdot \mathbf{e_y} + F_z \cdot \boldsymbol{e_z}$

kurz: $\mathbf{F} = \{ F_x , F_y , F_z \}$

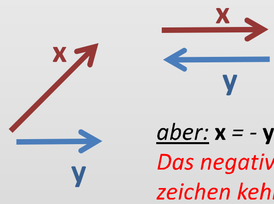
7.1 Grundregel der Vektorrechnung

Gleichheit von Vektoren:
Zwei Vektoren sind genau dann gleich, wenn sie im Betrag, der Richtung und dem Richtungssinn übereinstimmen.

gleiche Vektoren:



ungleiche Vektoren:



aber: **x** = - **y**
*Das negative Vorzeichen kehrt die Richtung von **y** um!*

Rechengesetze der Vektorrechnung:

Beachte: Die grundlegenden Rechengesetze aus ***Abschnitt 3.1*** sind für die Vektorrechnung nur bedingt gütig. Die Vektorprodukte (Skalar- und Kreuzprodukt) unterscheiden sich vom Produkt aus Faktoren!

Assoziativ- und Kommutativgesetz der Vektoraddition (nicht für die Vektormultiplikation!):

$(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = \mathbf{y} + (\mathbf{x} + \mathbf{z})$; $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$ (**x**, **y**, **z** sind Vektoren)

Für die Multiplikation gelten das Assoziativ-, Kommutativ- und Distributivgesetz ***nur*** für die Verknüpfung von Faktor (Skalar) und Vektor!

$a(b\mathbf{x}) = b(a\mathbf{x}) = (ab)\mathbf{x}$ (a, b sind Faktoren,

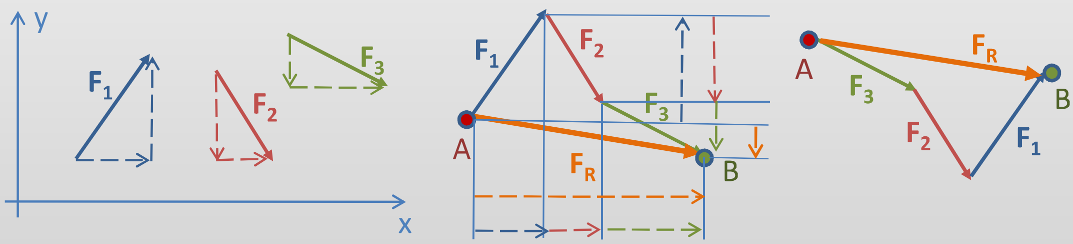
$a(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = a\mathbf{x} + a\mathbf{y}$ $(a + b)\mathbf{x} = a\mathbf{x} + b\mathbf{x}$ **x**, **y** sind Vektoren)

Jede Komponente des Vektors ist mit dem Faktor (Skalar) zu multiplizieren.

7.2 Addition bzw. Subtraktion von Vektoren

Bei der Addition bzw. Subtraktion von Vektoren entsteht ein resultierender Vektor.

Grafische Lösung:
Aneinanderreihen der Vektoren durch Parallelverschiebung



Analytische Lösung:
Addition bzw. Subtraktion der Komponenten der Einzelvektoren

$$\mathbf{F_R} = \mathbf{F_1} + \mathbf{F_2} + \mathbf{F_3}$$

$$\mathbf{F_R} = \{F_{Rx}, F_{Ry}\} \qquad F_{Rx} = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} \qquad F_{Ry} = F_{1y} - F_{2y} - F_{3y}$$

$$F_R = \sqrt{F_{Rx}^2 + F_{Ry}^2} \qquad \tan \alpha_R = F_{Ry} / F_{Rx}$$

Die Vektoren sind entweder in ihrer Komponentendarstellung oder mit ihrem Betrag und der Richtung gegeben. Betrag und Richtung müssen ***stets*** in die Komponeten überführt werden.

Dr.-Ing. Joachim Grochla
Institut für Mechanik / Numerische Mechanik
Elementarmathematik für Studienanfänger Maschinenbau
Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
Fakultät für Maschinenbau

Beispiele:

Gegeben: $\mathbf{F_1} = \begin{Bmatrix} 15 \\ 20 \end{Bmatrix}$ $\mathbf{F_2} = \begin{Bmatrix} 45 \\ -5 \end{Bmatrix}$ $\mathbf{F_3} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 45 \end{Bmatrix}$

Gesucht: Betrag und Richtung des resultierenden Vektors $\mathbf{F_R}$

$\mathbf{F_R} = \mathbf{F_1} + \mathbf{F_2} + \mathbf{F_3}$

$\mathbf{F_R} = \{F_{Rx}, F_{Ry}\}$ $\quad F_{Rx} = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} = 15 + 45 + 0 = 60$

$F_{Ry} = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} = 20 - 5 + 45 = 60$

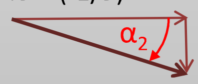
$$F_R = \sqrt{F_{Rx}^2 + F_{Ry}^2} = \sqrt{60^2 + 60^2} = \sqrt{2 \cdot 60^2} = 60\sqrt{2}$$

$\tan \alpha_R = F_{Ry} / F_{Rx} = 60 / 60 = 1$ $\quad \alpha_R = 45°$ bzw. $\alpha_R = \pi / 4$

Beträge und Richtungen der Einzelvektoren

$F_1 = \sqrt{15^2 + 20^2} = \sqrt{625} = 25$ $\quad \tan \alpha_1 = 20 / 15 = 4 / 3$ $\quad \alpha_1 = 53{,}13°$

$F_2 = \sqrt{45^2 + (-5)^2} = \sqrt{2050} = 45{,}28$ $\quad \tan \alpha_2 = (-5) / 45 = (-1/9)$ $\quad \alpha_2 = -6{,}34°$



$\alpha_2 = 353{,}66°$

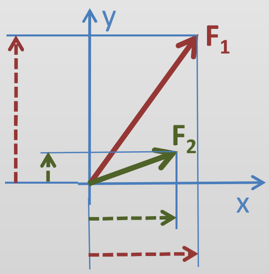
$F_3 = \sqrt{0^2 + 45^2} = \sqrt{45^2} = 45$ $\quad \tan \alpha_3 = 45 / 0$ $\quad \alpha_3 = 90°$

Gegeben:

$F_1 = 300$ N, $\alpha_1 = 60°$
$F_2 = 100$ N, $\alpha_2 = 30°$

Gesucht:

Betrag der resultierenden Kraft F_R und deren Richtung α_R



$\mathbf{F_R} = \mathbf{F_1} + \mathbf{F_2}$

Berechnen der Komponenten der Vektoren $\mathbf{F_1}$ und $\mathbf{F_2}$

$F_{1x} = F_1 \cdot \cos \alpha_1 = 300 \cdot \cos 60° = 150$ N
$F_{1y} = F_1 \cdot \sin \alpha_1 = 300 \cdot \sin 60° = 259{,}81$ N

$F_{2x} = F_2 \cdot \cos \alpha_2 = 100 \cdot \cos 30° = 86{,}6$ N
$F_{2y} = F_2 \cdot \sin \alpha_2 = 100 \cdot \sin 30° = 50$ N

$$\mathbf{F_R} = \begin{Bmatrix} 150 \\ 259{,}81 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 86{,}6 \\ 50 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 236{,}6 \\ 309{,}81 \end{Bmatrix} \text{ N} = \begin{Bmatrix} F_{Rx} \\ F_{Ry} \end{Bmatrix}$$

$$F_R = \sqrt{F_{Rx}^2 + F_{Ry}^2} = \sqrt{236{,}6^2 + 309{,}81^2} = 389{,}82$$

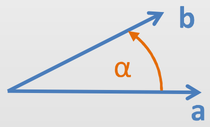
$\tan \alpha_R = F_{Ry} / F_{Rx} = 309{,}81 / 236{,}6 = 1{,}3094$ $\quad \alpha_R = 52{,}63°$

7.3 Die Multiplikation von Vektoren

7.3.1 Das Skalarprodukt zweier Vektoren (Punktprodukt)

Defintion:

Das Ergebnis des Skalarprodukts zweier Vektoren ist ein Skalar (reelle Zahl).



$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a \cdot b \cdot \cos\alpha = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

$$\mathbf{e_x} \cdot \mathbf{e_x} = 1 \qquad \mathbf{e_y} \cdot \mathbf{e_y} = 1 \qquad \mathbf{e_z} \cdot \mathbf{e_z} = 1$$

a_x , a_y , a_z Komponenten des Vektors **a**
b_x , b_y , b_z Komponenten des Vektors **b**
α Winkel zwischen den Vektoren **a** und **b**

Das Skalarprodukt wird benutzt, um den Winkel α zu bestimmen, der von den Vektoren **a** und **b** eingeschlossen wird.

$$\cos\alpha = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{a \cdot b} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} + \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$$

Es gilt:

cos α = 0	**a** und **b** stehen senkrecht aufeinander (orthogonal)
cos α = 1	**a** und **b** sind parallel zueinander
a·**b** = -*a*·*b*	**a** und **b** liegen parallel, aber entgegengesetzt gerichtet

Beispiel:

Gegeben:
a = { 3, -4, 0 } b = { 1, 2, -2 }

Gesucht:
Winkel α zwischen den Vektoren **a** und **b**

$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 3 \cdot 1 + (-4) \cdot 2 + 0 \cdot (-2) = -5$

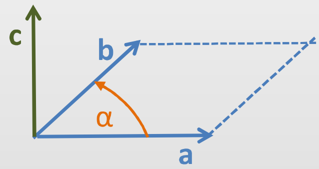
$$a = \sqrt{3^2 + (-4)^2 + 0^2} = 5 \qquad b = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2} = 3$$

$$\cos\alpha = \frac{-5}{5 \cdot 3} = -1/3 \qquad \alpha = 109{,}47°$$

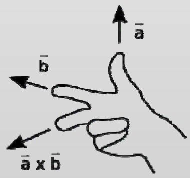
7.3.2 Das Vektorprodukt zweier Vektoren (Kreuzprodukt)

Defintion:

Das Ergebnis des Vektorprodukts zweier Vektoren **a** und **b** ist ein Vektor **c**, der senkrecht auf der von **a** und **b** aufgespannten Ebene steht. Sein Betrag entspricht dem Flächeninhalt des Parallelogramms, das von den Vektoren **a** und **b** gebildet wird. Der Richtungssinn des Vektors c ergibt sich aus der 3-Fingerregel (rechte Hand benutzen!).



3-Fingerregel



$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{c}$$

$$c = a \cdot b \cdot \sin\alpha = \begin{bmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{e_x} \times \mathbf{e_x} = \mathbf{e_y} \times \mathbf{e_y} = \mathbf{e_z} \times \mathbf{e_z} = 0$$
$$\mathbf{e_x} \times \mathbf{e_y} = \mathbf{e_z}$$
$$\mathbf{e_y} \times \mathbf{e_z} = \mathbf{e_x}$$
$$\mathbf{e_z} \times \mathbf{e_x} = \mathbf{e_y}$$

Es gilt:

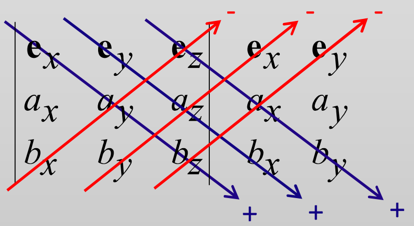
$\mathbf{a} \times \mathbf{a} = 0$ $\quad$ $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$ $\quad$ $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = 0$, wenn **a** und **b** parallel zueinander sind

$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$

Das Vektorprodukt **a** · **b** kann mit den Komponenten der Vektoren **a** und **b** als Determinante aufgeschrieben und berechnet werden.

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \left(a_y b_z - a_z b_y\right)\mathbf{e}_x - \left(a_x b_z - a_z b_x\right)\mathbf{e}_y - \left(a_y b_x - a_x b_y\right)\mathbf{e}_z$$

Ein Hilfsmittel zur Berechnung dieser Determinante ist das Shema von ***Sarus***



bilden der Produkte in Pfeilrichtung
blaue Produkte addieren, rote Produkte subtrahieren
nach den Einheitsvektoren sortieren
Das Ausklammern der Einheitsvektoren ergibt die Komponenten des neuen Vektors **a** x **b**

$$\mathbf{e_x} a_y b_z + \mathbf{e}_y a_z b_x + \mathbf{e_z} a_x b_y - b_x a_y \mathbf{e_z} - b_y a_z \mathbf{e_x} - b_z a_x \mathbf{e_y} = (a_y b_z - a_z b_y)\mathbf{e_x} - (a_x b_z - a_z b_x)\mathbf{e_y} - (a_y b_x - a_x b_y)\mathbf{e_z}$$

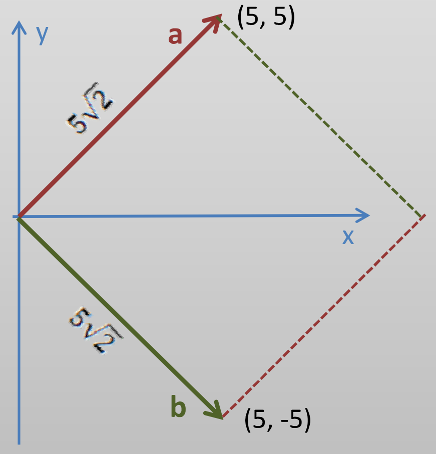
Beispiel:

Wie groß ist die Fläche des von den Vektoren **a** = { 5 , 5 } und b = { 5 , -5 } aufgespannten Parallelogramms (Quadrat)?

$a_x = 5 \quad b_x = 5$
$a_y = 5 \quad b_y = -5$
$a_z = 0 \quad b_z = 0$

$$\mathbf{c} = \begin{Bmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 5 \cdot 0 - 0 \cdot (-5) \\ 0 \cdot 5 - 5 \cdot 0 \\ 5 \cdot (-5) - 5 \cdot 5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -50 \end{Bmatrix}$$

$$A = c = \sqrt{0^2 + 0^2 + (-50)^2} = 50\,FE$$



Das Quadrat liegt in der x-y-Ebene (die z-Komponenten der Vektoren **a** und **b** sind jeweils 0). Das Kreuzprodukt der beiden Vektoren steht senkrecht auf der x-y-Ebene, also in z-Richtung (x- und y-Komponenten des Ergebnisvektors sind 0). Nach der 3 Finger-Regel zeigt der Ergebnisvektor entgegen der z-Achse (z-Komponente negativ -50).