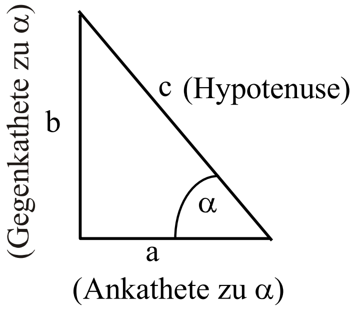
Trigonometrische Funktionen

Definition am rechtwinkligen Dreieck:

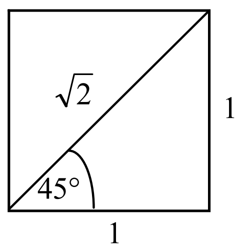


$$\left.\begin{aligned} \mathbf{sin}\,\alpha &= \frac{b}{c} \\ \mathbf{cos}\,\alpha &= \frac{a}{c} \\ \mathbf{tan}\,\alpha &= \frac{b}{a} \\ \mathbf{cot}\,\alpha &= \frac{a}{b} \end{aligned}\right\} \quad \mathbf{tan}\,\alpha = \frac{\mathbf{sin}\,\alpha}{\mathbf{cos}\,\alpha} = \frac{1}{\mathbf{cot}\,\alpha} \qquad \mathbf{cot}\,\alpha = \frac{\mathbf{cos}\,\alpha}{\mathbf{sin}\,\alpha} = \frac{1}{\mathbf{tan}\,\alpha}$$

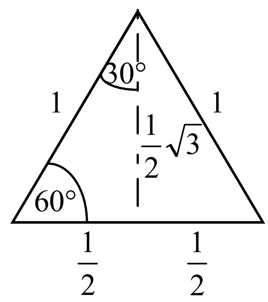
Satz des *Pythagoras* liefert:

$$a^2 + b^2 = c^2 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{cos}^2\,\alpha + \mathbf{sin}^2\,\alpha = 1$$

Funktionswerte für typische Winkel:



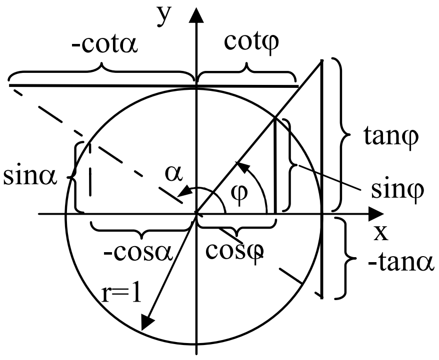
Quadrat mit Einheitskantenlängen

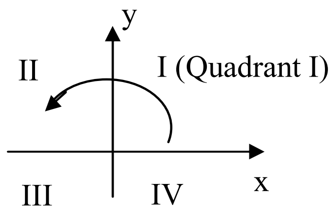


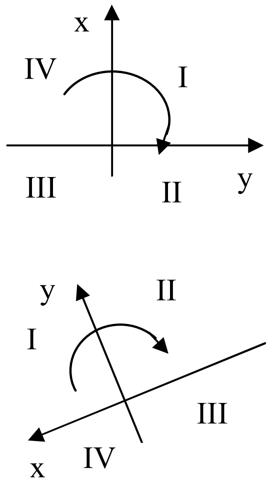
gleichseitiges Dreieck mit Einheitskantenlängen

Funktion	$\varphi = 30°$	$\varphi = 45°$	$\varphi = 60°$
$\sin\varphi$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2} = 0{,}707$	$\frac{1}{2}\sqrt{3} = 0{,}866$
$\cos\varphi$	$\frac{1}{2}\sqrt{3} = 0{,}866$	$\frac{1}{2}\sqrt{2} = 0{,}707$	$\frac{1}{2}$
$\cot\varphi$	$\sqrt{3} = 1{,}732$	1	$\frac{1}{3}\sqrt{3} = 0{,}577$
$\tan\varphi$	$\frac{1}{3}\sqrt{3} = 0{,}577$	1	$\sqrt{3} = 1{,}732$

Darstellung am Einheitskreis/Quadrant/Vorzeichen :







Funktion	Quadrant			
	I	II	III	IV
sin φ	+	+	-	-
cos φ	+	-	-	+
tan φ	+	-	+	-
cot φ	+	-	+	-

Winkelgröße φ in Grad	0°	90°	180°	270°	360°
Winkelgröße φ im Bogenmaß	0	π/2	π	3π/2	2π
sinφ	0	+1	0	-1	0
cosφ	+1	0	-1	0	+1
tanφ	0	±∞	0	±∞	0
cotφ	±∞	0	±∞	0	±∞

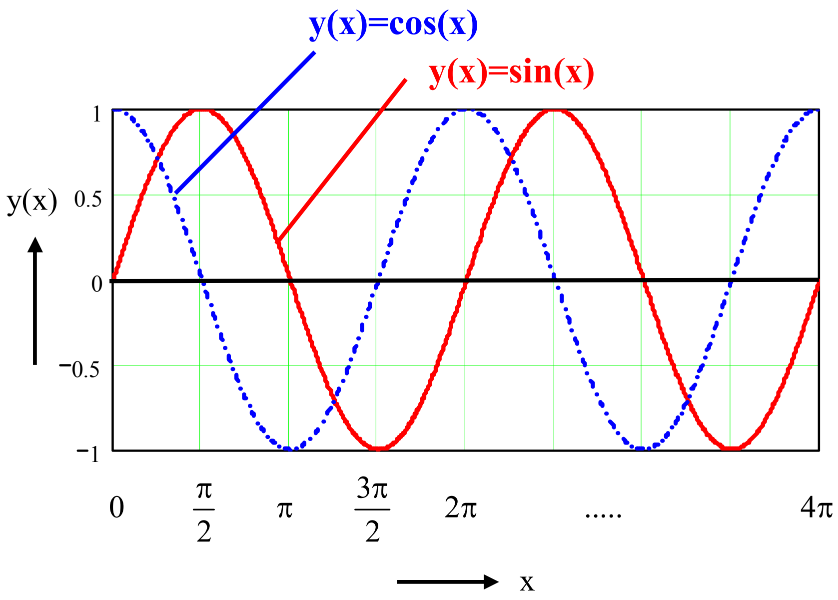
Eigenschaften trigonometrischer Funktionen:

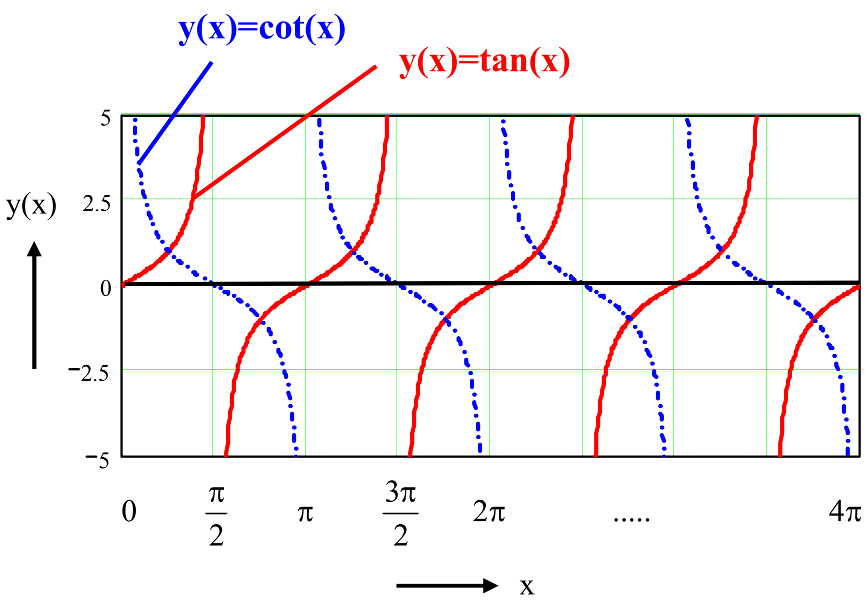
$$\left.\begin{aligned}\mathbf{sin}(-\varphi) &= -\mathbf{sin}\,\varphi\\ \mathbf{tan}(-\varphi) &= -\mathbf{tan}\,\varphi\\ \mathbf{cot}(-\varphi) &= -\mathbf{cot}\,\varphi\end{aligned}\right\}\quad \text{ungerade Funktionen}$$

$$\mathbf{cos}(-\varphi) = \mathbf{cos}\,\varphi \qquad \text{gerade (symmetrische) Funktion}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{sin}(\varphi \pm 2n\pi) &= \mathbf{sin}\,\varphi \qquad & \mathbf{cos}(\varphi \pm 2n\pi) &= \mathbf{cos}\,\varphi\\ \mathbf{tan}(\varphi \pm n\pi) &= \mathbf{tan}\,\varphi \qquad & \mathbf{cot}(\varphi \pm n\pi) &= \mathbf{cot}\,\varphi\end{aligned}\Bigg\}\quad \text{für } n = 1, 2, 3, \ldots$$

Grafische Darstellung der trigonometrischen Funktionen:





Beziehungen zwischen den Winkelfunktionen desselben Winkels:

gesucht	gegeben			
	sinφ	cosφ	tanφ	cotφ
sinφ =		$\pm\sqrt{1-\cos^2\varphi}$	$\frac{\tan\varphi}{\pm\sqrt{1+\tan^2\varphi}}$	$\frac{1}{\pm\sqrt{1+\cot^2\varphi}}$
cosφ =	$\pm\sqrt{1-\sin^2\varphi}$		$\frac{1}{\pm\sqrt{1+\tan^2\varphi}}$	$\frac{\cot\varphi}{\pm\sqrt{1+\cot^2\varphi}}$
tanφ =	$\frac{\sin\varphi}{\pm\sqrt{1-\sin^2\varphi}}$	$\frac{\pm\sqrt{1-\cos^2\varphi}}{\cos\varphi}$		$\frac{1}{\cot\varphi}$
cotφ =	$\frac{\pm\sqrt{1-\sin^2\varphi}}{\sin\varphi}$	$\frac{\cos\varphi}{\pm\sqrt{1-\cos^2\varphi}}$	$\frac{1}{\tan\varphi}$	

Additionstheoreme (eine Auswahl)

(a) $$\sin(x \pm y) = \sin x \cdot \cos y \pm \cos x \cdot \sin y$$

(b) $$\cos(x \pm y) = \cos x \cdot \cos y \mp \sin x \cdot \sin y$$

(c) $$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \cdot \tan y}$$

(d) $$\sin 2x = 2\sin x \cdot \cos x$$

(e) $$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

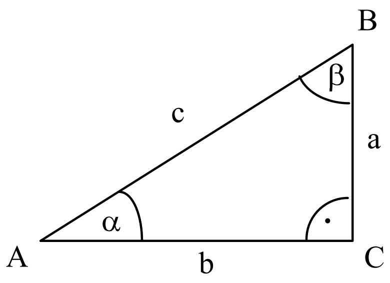
(f) $$\tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$$

⋮

(siehe Tabellenwerke)

Anwendung der trigonometrischen Funktionen

Berechnung rechtwinkliger Dreiecke



Es gilt im rechtwinkligen Dreieck immer:

$$\alpha + \beta = 90°$$

Pythagoras: $a^2 + b^2 = c^2$

Einige typische Berechnungsfälle:

I. $\text{Geg.: } c, \alpha \quad \Rightarrow \quad \beta = 90° - \alpha\,, \qquad a = c\,\mathbf{sin}\,\alpha\,, \qquad b = c\,\mathbf{cos}\,\alpha$

II. $\text{Geg.: } c, a \quad \Rightarrow \quad \mathbf{sin}\,\alpha = \dfrac{a}{c}\,, \quad \Rightarrow \quad \alpha\,, \quad \beta = 90° - \alpha\,, \quad b = \sqrt{c^2 - a^2}$

oder mit α: z. B. $b = c\,\mathbf{cos}\,\alpha = a\,\mathbf{cot}\,\alpha$

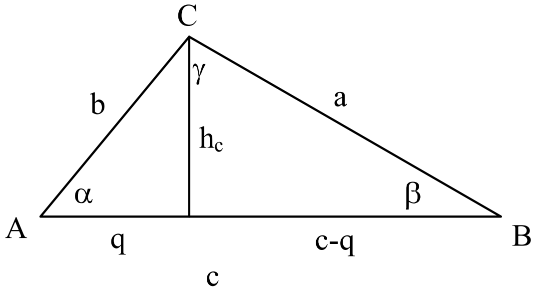
III. $\text{Geg.: } a, \alpha \quad \Rightarrow \quad \beta = 90° - \alpha\,, \qquad b = a\,\mathbf{cot}\,\alpha\,, \qquad c = \dfrac{a}{\mathbf{sin}\,\alpha}$

oder mit β: z.B. $b = a\,\mathbf{tan}\,\beta\,, \quad c = \dfrac{a}{\mathbf{cos}\,\beta}$

IV: $\text{Geg.: } a, b \quad \Rightarrow \quad \mathbf{tan}\,\alpha = \dfrac{a}{b}\,, \qquad \beta = 90° - \alpha\,, \qquad c = \sqrt{a^2 + b^2}$

oder mit α: $c = \dfrac{a}{\mathbf{sin}\,\alpha}$ oder $c = \dfrac{b}{\mathbf{cos}\,\alpha}$

Trigonometrische Funktionen im allgemeinen Dreieck:



mit $\alpha + \beta + \gamma = 180°$

Mit $\quad h_c = a\,\mathbf{sin}\,\beta = b\,\mathbf{sin}\,\alpha \quad$ folgt z. B. $\dfrac{a}{\mathbf{sin}\,\alpha} = \dfrac{b}{\mathbf{sin}\,\beta}$

Verallgemeinerung führt auf den

<u>Sinussatz:</u> $\boxed{\dfrac{a}{\mathbf{sin}\,\alpha} = \dfrac{b}{\mathbf{sin}\,\beta} = \dfrac{c}{\mathbf{sin}\,\gamma}}$

Aus $a^2 = h_c^2 + (c-q)^2$ mit $b^2 = h_c^2 + q^2$ und $q = b\,\mathbf{cos}\,\alpha$

folgt $a^2 = b^2 - q^2 + c^2 - 2cq + q^2 = b^2 + c^2 - 2cb\,\mathbf{cos}\,\alpha$

Verallgemeinerung führt auf den

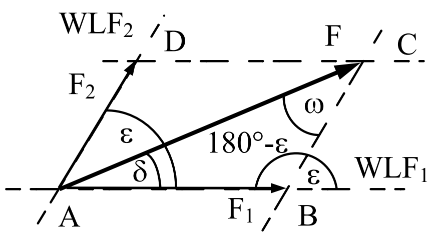
<u>Kosinussatz:</u> $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\,\mathbf{cos}\alpha$

oder $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\,\mathbf{cos}\beta$

oder $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\,\mathbf{cos}\gamma$

Beispiel (Aufgabe 13): Eine Kraft F = 65 N soll so in zwei Kräfte F_1 und F_2 zerlegt werden, daß F_1 und F einen Winkel von $\delta = 18°$, die Teilkräfte untereinander einen von $\varepsilon = 65°$ einschließen.

Aus dem Bild rechts folgt:



$$\omega + \delta + (180° - \varepsilon) = 180°$$
$$\omega = \varepsilon - \delta = (65° - 18°) = 47°$$

Im Dreieck ABC gilt (Sinussatz):

$$\frac{F_1}{\mathbf{sin}\omega} = \frac{F}{\mathbf{sin}(180° - \varepsilon)} \quad \Rightarrow \quad F_1 = F\frac{\mathbf{sin}\omega}{\mathbf{sin}(180° - \varepsilon)} = 65\text{N} \cdot \frac{\mathbf{sin}47°}{\mathbf{sin}65°} = 52{,}45\text{N}$$

$$\frac{F_2}{\mathbf{sin}\delta} = \frac{F}{\mathbf{sin}\varepsilon} \quad \Rightarrow \quad F_2 = F\frac{\mathbf{sin}\delta}{\mathbf{sin}\varepsilon} = 65\text{N} \cdot \frac{\mathbf{sin}18°}{\mathbf{sin}65°} = 22{,}16\text{N}$$

Hinweis: $\mathbf{sin}(180° - \varepsilon) = \mathbf{sin}\,\varepsilon$

Goniometrische Gleichungen

z.B.: $\sin(2x+\pi)-\sqrt{2}\cos x=0$ reine goniometrische Gleichung

$\tan x-3x=0$ gemischte goniometrische Gleichung

Es existiert kein allgemeiner Lösungsalgorithmus (Lösung grafisch und numerisch, Näherungsverfahren).

<u>Reine goniometrische Gleichung:</u>

Beispiele 1 (Aufgabe 26)

$$\cos^3(2x)=b$$

$$\cos 2x=\sqrt[3]{b} \quad\Rightarrow\quad 2x=\arccos\left(\sqrt[3]{b}\right)$$

$$x=\frac{1}{2}\arccos\left(\sqrt[3]{b}\right)$$

Beispiele 2 (Aufgabe 26)- Lösung durch Substitution:

$$\tan^2 x+p\tan x+q=0 \qquad \text{Substitution: } u=\tan x$$

$$u^2+pu+q=0 \quad\Rightarrow\quad u_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}$$

$$(\tan x)_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q} \quad\Rightarrow\quad x_{1,2}=\arctan\left(-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}\right)$$

Beispiele 3 - Zurückführen auf eine trigonometrische Funktion

$$5\sin x-3\cos x=3 \qquad \text{Lösung gesucht für } 0\le x\le 2\pi$$

$$5\sin x-3=3\cos x=3\sqrt{1-\sin^2 x} \;\Big|\; \text{quadr.}$$

$$25\sin^2 x-30\sin x+9=9\left(1-\sin^2 x\right)$$

$$34\sin^2 x-30\sin x=0 \quad\Rightarrow\quad \sin x(17\sin x-15)=0$$

$$(\sin x)_1=0 \quad\Rightarrow\quad (x_{11}=0),\, x_{12}=\pi,\; (x_{13}=2\pi) \quad \text{bzw.}$$

$$(\sin x)_2=\frac{15}{17} \quad\Rightarrow\quad x_{21}=61{,}92°,\,(x_{22}=118{,}08°)$$

Die Probe zeigt, nur x_{12} und x_{21} sind Lösungen. Die Lösungsmenge hat sich durch nichtäquivalente Umformungen vergrößert! Deshalb sind nicht alle Lösungen auch Lösungen der Ausgangsgleichung.

Grafische Lösung zu Beispiel 3:

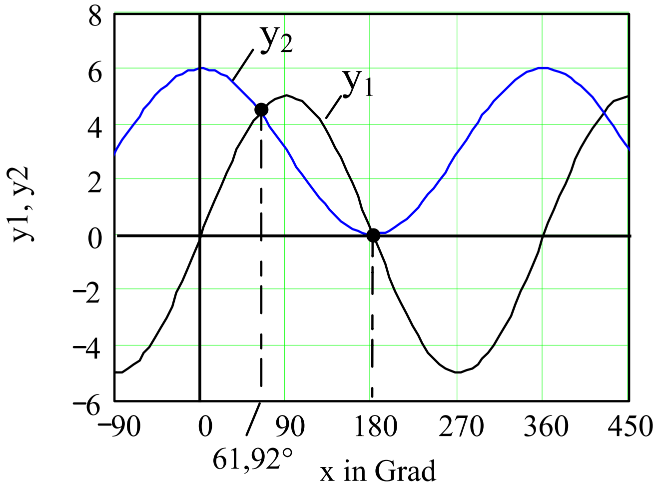
$$5\,\mathbf{sin}\,x - 3\,\mathbf{cos}\,x = 3 \qquad \text{Umformung} \quad \Rightarrow$$

$$5\,\mathbf{sin}\,x = 3(\mathbf{cos}\,x + 1)$$

$$y_1 = y_2 \qquad \text{mit} \quad y_1 = 5\,\mathbf{sin}\,x$$

$$y_2 = 3(\mathbf{cos}\,x + 1)$$

Die Schnittpunkte der beiden Funktionen y_1 und y_2 sind die gesuchten Lösungen der Ausgangsfunktion.



Beispiel 4:

$$\mathbf{sin}(2x + \pi) - \sqrt{2}\,\mathbf{cos}\,x = 0 \qquad \text{Lösung gesucht für } 0 \le x \le 2\pi$$

$$-\mathbf{sin}\,2x - \sqrt{2}\,\mathbf{cos}\,x = 0$$

$$-2\,\mathbf{sin}\,x\,\mathbf{cos}\,x - \sqrt{2}\,\mathbf{cos}\,x = 0$$

$$\mathbf{cos}\,x \cdot \left(2\,\mathbf{sin}\,x + \sqrt{2}\right) = 0$$

$$\mathbf{cos}\,x = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{\pi}{2}, \quad x_2 = \frac{3\pi}{2}$$

$$2\,\mathbf{sin}\,x + \sqrt{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{sin}\,x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \quad x_3 = \frac{5\pi}{4}, \quad x_4 = \frac{7\pi}{4}$$

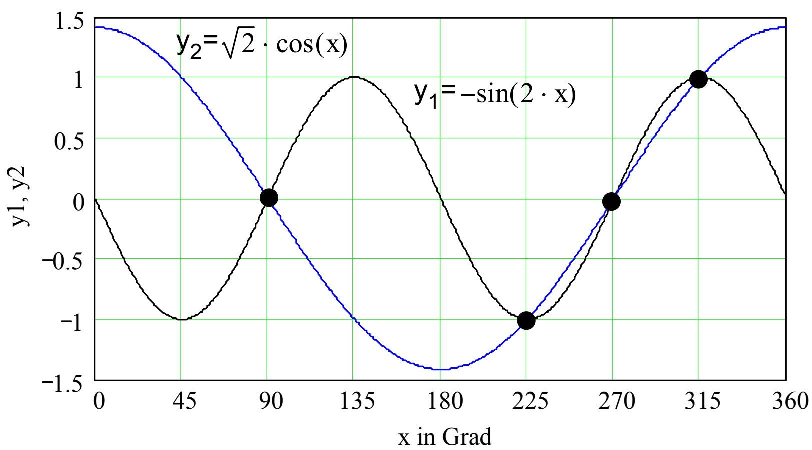
Grafische Lösung nach Umformung:

$$-\mathbf{sin}\,2x = \sqrt{2}\,\mathbf{cos}\,x$$

$$y_1 = y_2$$

$$\text{mit} \quad y_1 = -\mathbf{sin}\,2x$$

$$y_2 = \sqrt{2}\,\mathbf{cos}\,x$$



Gemischte goniometrische Gleichung:

Beispiel:
Gesucht seien die Nullstellen der Funktion

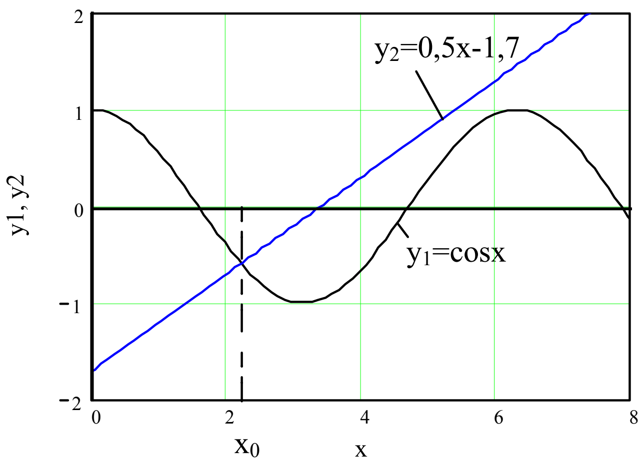
$$f(x) = \cos x - x/2 + 1{,}7$$

Lösung erfolgt grafisch!
Nullstellen für:

$$f(x) = \cos x - x/2 + 1{,}7 = 0 \quad \rightarrow \quad \cos x = x/2 - 1{,}7$$
$$y_1 = y_2$$

mit $y_1 = \cos x$
$y_2 = 0{,}5x - 1{,}7$

Schnittpunkt der Kurven y_1 und y_2 sind die gesuchten Nullstellen.



Nur ein Schnittpunkt:
$x_0 \approx 2{,}2 \approx 126{,}05\ °$

Umgebung von x_0 vergrößern $\Rightarrow$ genaueres Ablesen.

Probe: $f(x_0) = \cos 2{,}2 - 1{,}1 + 1{,}7 = -0{,}5885 + 0{,}6 = +0{,}0115 = 0$ (?!)

Näherung durch *Newton*sche Näherungsformel mit Startwert x_0:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}, \quad f'(x) = -\sin x - \frac{1}{2}, \quad f'(x_0) = -0{,}8085 - 0{,}5 = -1{,}3085$$

$$x_1 = 2{,}2 + \frac{0{,}0115}{1{,}3085} = 2{,}2089 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) = 0{,}00433 \text{ (bereits besser als oben!)}$$

Weitere Verbesserung durch: $$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$