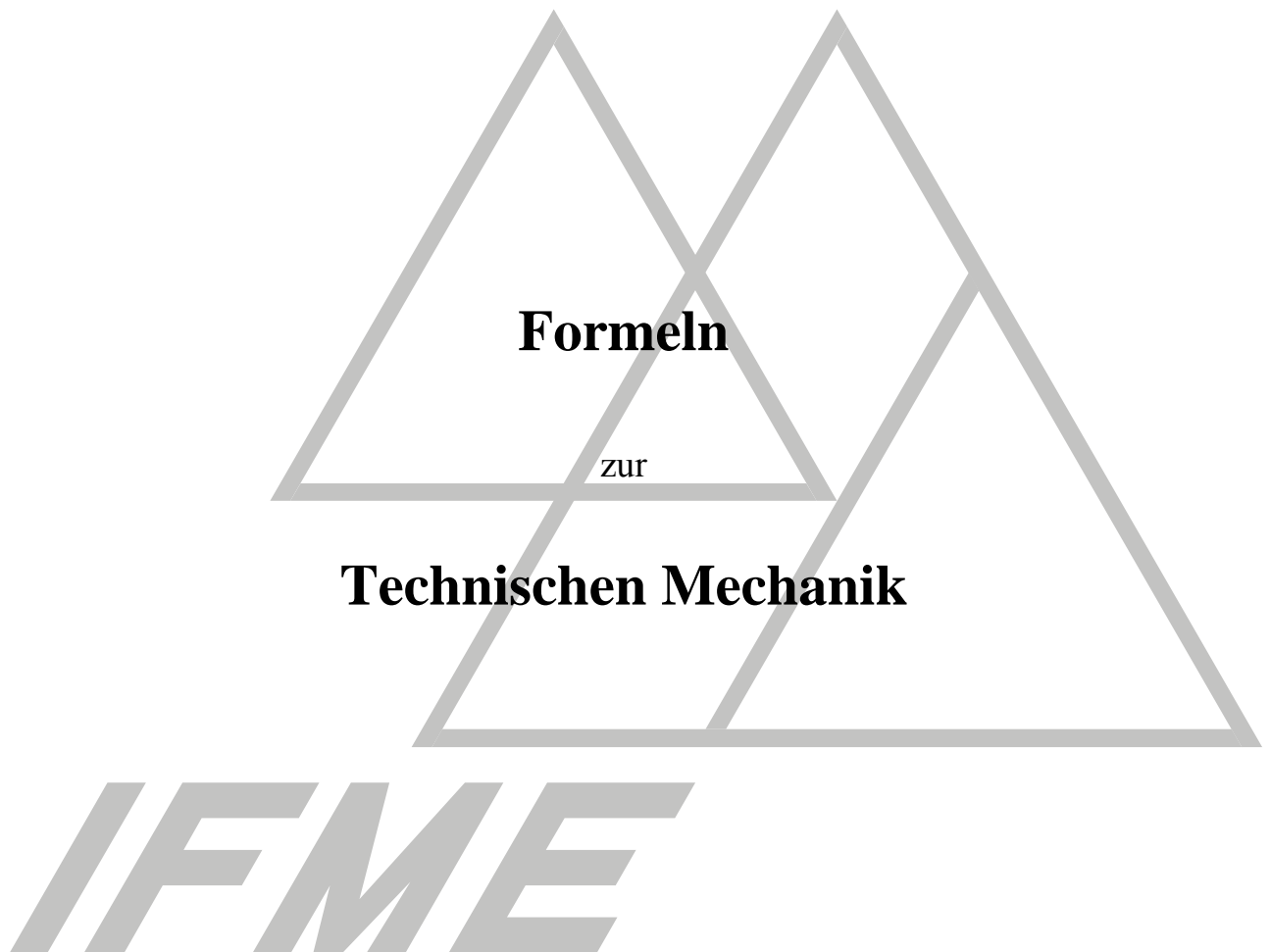


**Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg**

**Institut für Mechanik**



**Inhalt:**

Seite

Statik starrer Körper

1

Festigkeitslehre

9

Kinematik und Kinetik

25

**Ausgabe 2010**



# Statik starrer Körper

## Darstellung von Kräften und Momenten:

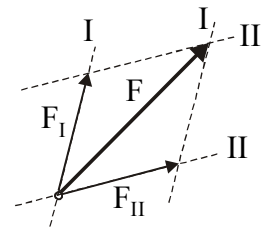
- der Vektorcharakter von Kräften und Momenten wird durch einen Pfeil über dem Formelzeichen gekennzeichnet (z.B.  $\vec{F}$  bzw.  $\vec{M}$ )
- Beträge von Vektoren werden durch Normaldruck dargestellt (z.B.  $|\vec{F}| \equiv F$ )

## Zentrales ebenes Kraftsystem

### Äquivalenz

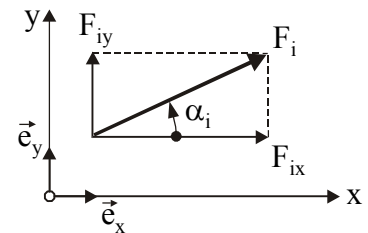
- Zerlegung einer Kraft in zwei beliebige Richtungen I und II

Kräfteparallelogramm:  $\vec{F} = \vec{F}_I + \vec{F}_{II}$



- Zerlegung einer Kraft in zwei senkrechte Komponenten (Komponentendarstellung)

$\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$  – Einheitsvektoren,  
 $|\vec{e}_x| = 1, |\vec{e}_y| = 1, |\vec{e}_z| = 1$   
 $\vec{F}_i = F_{ix} \vec{e}_x + F_{iy} \vec{e}_y \quad F_{ix} = F_i \cos \alpha_i$   
 $F_{iy} = F_i \sin \alpha_i$



- Zusammensetzung von Kräften

Resultierende Kraft:

$$\vec{F}_R = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = F_{Rx} \vec{e}_x + F_{Ry} \vec{e}_y$$

$$F_{Rx} = \sum_{i=1}^n F_{ix}, \quad F_{Ry} = \sum_{i=1}^n F_{iy}$$

Betrag der Resultierenden:

$$F_R = \sqrt{F_{Rx}^2 + F_{Ry}^2}$$

Richtung der Resultierenden:

$$\tan \alpha_R = \frac{F_{Ry}}{F_{Rx}}$$

## Gleichgewicht

Gleichgewichtsbedingung:

$$\vec{F}_R = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = 0$$

in Komponentenschreibweise:

$$F_{Rx} = \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0, \quad F_{Ry} = \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0$$

symbolisch:

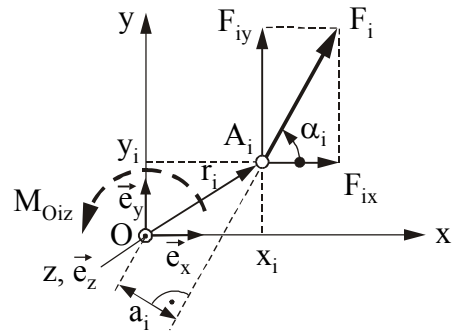


# Allgemeines ebenes Kraftsystem

Moment einer Kraft bezüglich des Punktes O:

Momentenvektor:  $\vec{M}_{O_i} = \vec{r}_i \times \vec{F}_i$

$$\vec{M}_{O_i} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ x_i & y_i & 0 \\ F_{ix} & F_{iy} & 0 \end{vmatrix} = M_{O_{iz}} \vec{e}_z$$



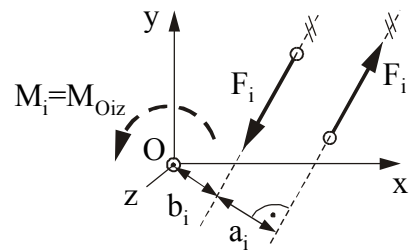
Betrag:  $M_{O_i} = M_{O_{iz}} = x_i F_{iy} - y_i F_{ix}$   
 oder  $M_{O_i} = M_{O_{iz}} = a_i F_i$

Drehsinn:

**Sonderfall:** Moment eines Kräftepaars

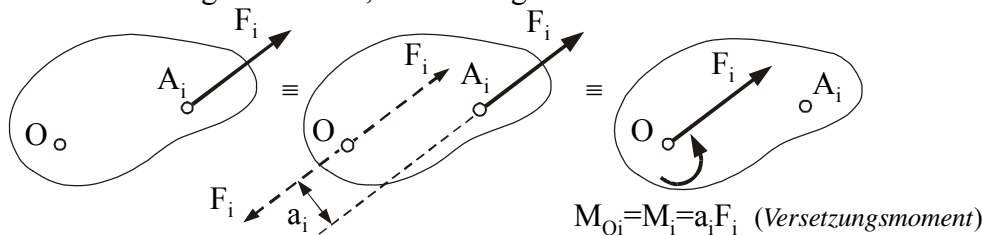
$$M_i = (b_i + a_i) F_i - b_i F_i = a_i F_i$$

(→ unabhängig vom Bezugspunkt)

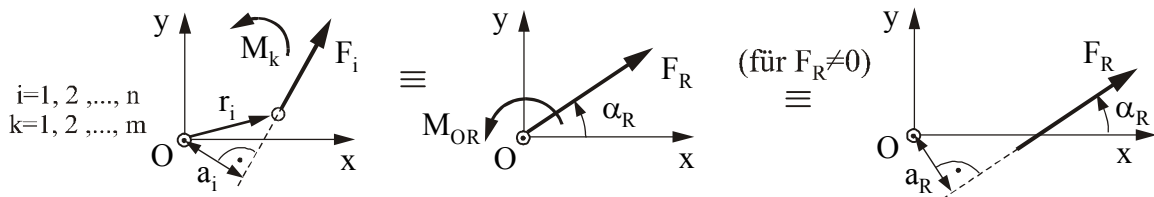


## Äquivalenz

- Parallelverschiebung einer Kraft, Versetzungsmoment



- Zusammensetzung von Kräften und Momenten:



Resultierende Kraft  $\vec{F}_R = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$  (vgl. zentrales ebenes Kraftsystem)

Resultierendes Moment  $\vec{M}_{OR} = \sum_{i=1}^n \vec{M}_{O_i} + \sum_{k=1}^m \vec{M}_k = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_i + \sum_{k=1}^m \vec{M}_k$

bzw.  $M_{OR} = \sum_{i=1}^n M_{O_i} + \sum_{k=1}^m M_k = \sum_{i=1}^n a_i \cdot F_i + \sum_{k=1}^m M_k$

Lage der resultierenden Kraft  $a_R \cdot F_R = M_{OR}$  (Voraussetzung:  $F_R \neq 0$ )

## Gleichgewicht

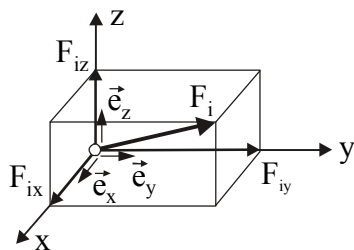
Gleichgewichtsbedingungen:  $\vec{F}_R = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = 0$ ,  $\vec{M}_{OR} = \sum_{i=1}^n \vec{M}_{Oi} + \sum_{k=1}^m \vec{M}_k = 0$

in Komponentenschreibweise:  $F_{Rx} = \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0$ ,  $F_{Ry} = \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0$ ,  $M_{OR} = \sum_{i=1}^n M_{Oi} + \sum_{k=1}^m M_k = 0$

symbolisch:  $\longrightarrow$  :  $\uparrow$  :  $\curvearrowright$  :

## Zentrales räumliches Kraftsystem

### Äquivalenz



$$\vec{F}_R = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = F_{Rx} \vec{e}_x + F_{Ry} \vec{e}_y + F_{Rz} \vec{e}_z$$

$$F_{Rx} = \sum_{i=1}^n F_{ix}, \quad F_{Ry} = \sum_{i=1}^n F_{iy}, \quad F_{Rz} = \sum_{i=1}^n F_{iz}$$

$$F_R = \sqrt{F_{Rx}^2 + F_{Ry}^2 + F_{Rz}^2}$$

## Gleichgewicht

Gleichgewichtsbedingungen:  $\vec{F}_R = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = 0$

in Komponentenschreibweise:  $F_{Rx} = \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0$ ,  $F_{Ry} = \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0$ ,  $F_{Rz} = \sum_{i=1}^n F_{iz} = 0$

symbolisch:  $\swarrow$  x :  $\longrightarrow$  y :  $\uparrow$  z :

## Allgemeines räumliches Kraftsystem

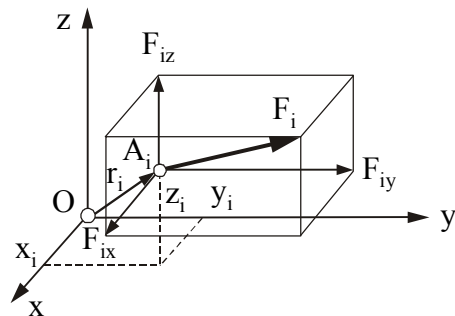
Moment einer Kraft bezüglich des Punktes O

$$\vec{M}_{Oi} = \vec{r}_i \times \vec{F}_i$$

$$\vec{M}_{Oi} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ x_i & y_i & z_i \\ F_{ix} & F_{iy} & F_{iz} \end{vmatrix}$$

$$\vec{M}_{Oi} = M_{Oix} \vec{e}_x + M_{Oiy} \vec{e}_y + M_{Oiz} \vec{e}_z$$

$$M_{Oix} = y_i F_{iz} - z_i F_{iy}, \quad M_{Oiy} = z_i F_{ix} - x_i F_{iz}, \quad M_{Oiz} = x_i F_{iy} - y_i F_{ix}$$

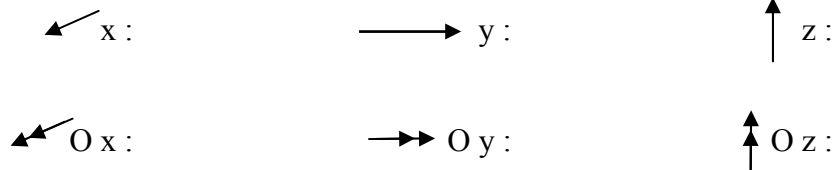


## Gleichgewicht

Gleichgewichtsbedingungen:  $\vec{F}_R = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = 0$ ,  $\vec{M}_{OR} = \sum_{i=1}^n \vec{M}_{O_i} = 0$

in Komponentenschreibweise:

$$\begin{aligned} F_{Rx} &= \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0, & F_{Ry} &= \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0, & F_{Rz} &= \sum_{i=1}^n F_{iz} = 0 \\ M_{ORx} &= \sum_{i=1}^n M_{O_{ix}} = 0, & M_{ORy} &= \sum_{i=1}^n M_{O_{iy}} = 0, & M_{ORz} &= \sum_{i=1}^n M_{O_{iz}} = 0 \end{aligned}$$

symbolisch: 

## Schwerpunkt

### Körper im homogenen Schwerfeld

*Schwerpunkt = Massenmittelpunkt:*

$$x_S = \frac{\int x \, dm}{m}, \quad y_S = \frac{\int y \, dm}{m}, \quad z_S = \frac{\int z \, dm}{m}, \quad m = \int dm$$

*Sonderfall: Dichte  $\rho = \text{konst.}$  (Volumenmittelpunkt)*

$$x_S = \frac{\int x \, dV}{V}, \quad y_S = \frac{\int y \, dV}{V}, \quad z_S = \frac{\int z \, dV}{V}, \quad V = \int dV$$

### Ebene Flächen

$$x_S = \frac{\int x \, dA}{A}, \quad y_S = \frac{\int y \, dA}{A}, \quad A = \int dA$$

### Ebene Linien

$$x_S = \frac{\int x \, dl}{l}, \quad y_S = \frac{\int y \, dl}{l}, \quad l = \int dl$$

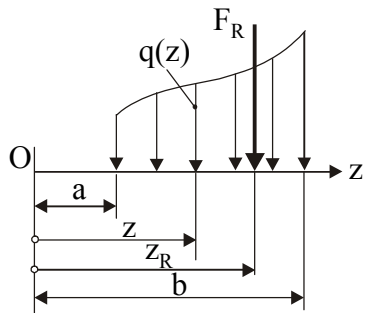
### Zusammengesetzte Flächen

Voraussetzung: Für die Teilflächen  $A_i$  sind die Schwerpunktskoordinaten  $x_{Si}$ ,  $y_{Si}$  bekannt.

$$x_S = \frac{1}{A} \sum_i x_{Si} A_i, \quad y_S = \frac{1}{A} \sum_i y_{Si} A_i, \quad A = \sum_i A_i$$

# Streckenlasten

## Ermittlung der Resultierenden

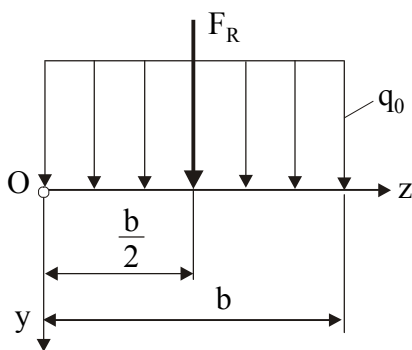


Größe der Resultierenden:  $F_R = \int_a^b q(z) dz$

Lage der Resultierenden:  $z_R = \frac{1}{F_R} \int_a^b q(z) z dz$

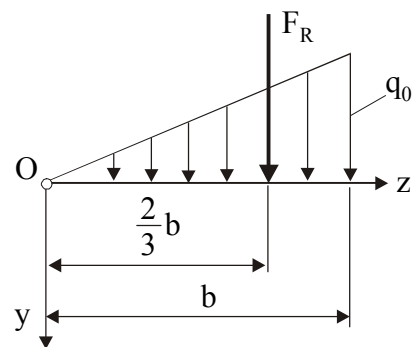
## Beispiele

### Rechtecklast



$$F_R = q_0 b, \quad z_R = \frac{1}{2} b$$

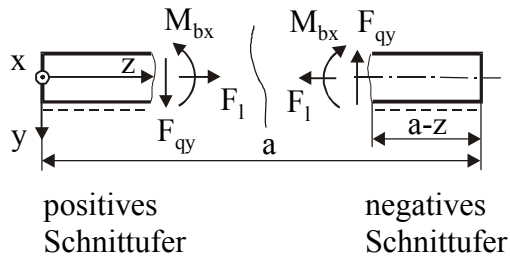
### Dreiecklast



$$F_R = \frac{1}{2} q_0 b, \quad z_R = \frac{2}{3} b$$

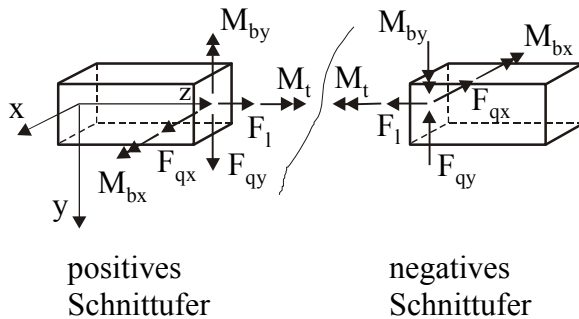
# Schnittgrößen

- eben



$F_l$  – Längskraft  
 $F_{qy}$  – Querkraft  
 $M_{bx}$  – Biegemoment

- räumlich



$F_l$  – Längskraft  
 $F_{qx}, F_{qy}$  – Querkräfte  
 $M_t$  – Torsionsmoment  
 $M_{bx}, M_{by}$  – Biegemomente

## Differentielle Beziehungen

Positive Streckenlasten haben die Richtung der positiven Achsen!

$$\frac{dF_l}{dz} = -q_z(z)$$

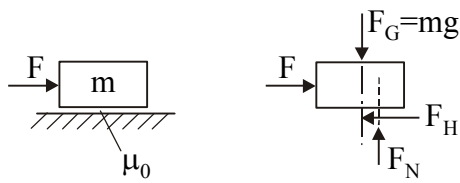
$$\frac{dF_{qy}}{dz} = -q_y(z), \quad \frac{dF_{qx}}{dz} = -q_x(z)$$

$$\frac{dM_{bx}}{dz} = F_{qy}(z), \quad \frac{dM_{by}}{dz} = F_{qx}(z)$$



# Haftung und Gleitreibung

## Haftung



Bedingung für Haftung:

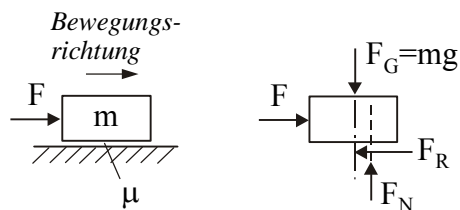
$$|F_H| \leq F_{H \max} = \mu_0 F_N \quad \text{für } F_N > 0$$

$F_H$  – Haftungskraft (Reaktionskraft; hier  $F_H = F$ )

$F_N$  – resultierende Normalkraft an der Kontaktfläche (Reaktionskraft; hier  $F_N = F_G$ )

$\mu_0$  – Haftungskoeffizient

## Gleitreibung



Annahme:  $F > F_R$  (Bewegung nach rechts!)

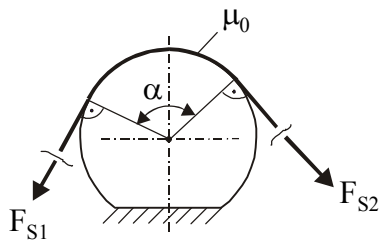
$$F_R = \mu F_N \quad (\text{Coulombsches Gesetz}) \quad \text{für } F_N > 0$$

$F_R$  – Gleitreibungskraft (eingepreßte Kraft; entgegen der Bewegungsrichtung)

$F_N$  – resultierende Normalkraft an der Kontaktfläche (Reaktionskraft; hier  $F_N = F_G$ )

$\mu$  – Gleitreibungskoeffizient ( $\mu < \mu_0$ )

## Seilhaftung

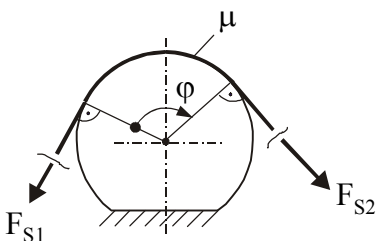


Bedingung:

$$F_{S1} e^{-\mu_0 \alpha} \leq F_{S2} \leq F_{S1} e^{\mu_0 \alpha}$$

$\alpha$  – Umschlingungswinkel

## Seilreibung



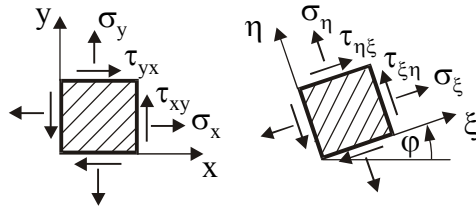
$$F_{S2} = F_{S1} e^{\mu \varphi}$$

$\varphi$  – Umschlingungswinkel, wobei Richtungssinn von  $\varphi$  = Richtung der Seilbewegung ist.



# Festigkeitslehre

## Ebener Spannungszustand



### Gleichheit der zugeordneten Schubspannungen:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{\xi\eta} = \tau_{\eta\xi}$$

### Spannungen im gedrehten Koordinatensystem:

$$\sigma_{\xi} = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\cos 2\varphi + \tau_{xy}\sin 2\varphi$$

$$\sigma_{\eta} = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) - \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\cos 2\varphi - \tau_{xy}\sin 2\varphi$$

$$\tau_{\xi\eta} = -\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\sin 2\varphi + \tau_{xy}\cos 2\varphi$$

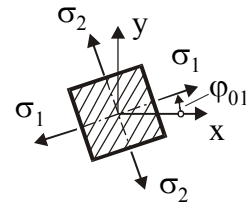
### Invarianz der Summe der Normalspannungen:

$$\sigma_x + \sigma_y = \sigma_{\xi} + \sigma_{\eta}$$

### Hauptnormalspannungen:

$$\sigma_1 = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \sqrt{\frac{1}{4}(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_2 = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) - \sqrt{\frac{1}{4}(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \tau_{xy}^2}$$



### Richtung der Hauptnormalspannungen:

$$\tan\varphi_{01} = \frac{\sigma_1 - \sigma_x}{\tau_{xy}} = \frac{\sigma_y - \sigma_2}{\tau_{xy}},$$

$$\varphi_{02} = \varphi_{01} + \frac{\pi}{2}$$

Für  $\varphi = \varphi_{01}$  gilt:  $\sigma_{\xi} = \sigma_1, \quad \sigma_{\eta} = \sigma_2, \quad \tau_{\xi\eta} = 0$

### Hauptschubspannungen:

$$\tau_{\max 1,2} = \tau_{\xi\eta}(\varphi_{01} \pm \frac{\pi}{4}) = \mp \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)$$

## Verschiebungen und Verzerrungen

**Verschiebungen:**  $u, v, w$  in den Koordinatenrichtungen  $x, y, z$

**Verzerrungen:**

- **Dehnungen:**  $\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$
- **Gleitungen:**  $\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}$

## Verallgemeinertes Hookesches Gesetz

(Beliebiger räumlicher Spannungszustand bei Berücksichtigung der Dehnung infolge einer Temperaturänderung  $\Delta T$ )

- **Dehnungen:** 
$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] + \alpha \Delta T$$
$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)] + \alpha \Delta T$$
$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] + \alpha \Delta T$$

$\alpha$  – Wärmeausdehnungskoeffizient
- **Gleitungen:**  $\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}, \quad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}, \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)}$

*Elastische Konstanten:*  $E$  – Elastizitätsmodul  
 $\nu$  – Querkontraktionszahl  
 $G$  – Gleitmodul

Gleichungen für die Normalspannungen infolge der Dehnungen:

$$\sigma_x = \frac{E}{1+\nu} \left[ \varepsilon_x + \frac{\nu}{1-2\nu} e \right] - \frac{E}{1-2\nu} \alpha \Delta T$$
$$\sigma_y = \frac{E}{1+\nu} \left[ \varepsilon_y + \frac{\nu}{1-2\nu} e \right] - \frac{E}{1-2\nu} \alpha \Delta T$$
$$\sigma_z = \frac{E}{1+\nu} \left[ \varepsilon_z + \frac{\nu}{1-2\nu} e \right] - \frac{E}{1-2\nu} \alpha \Delta T$$

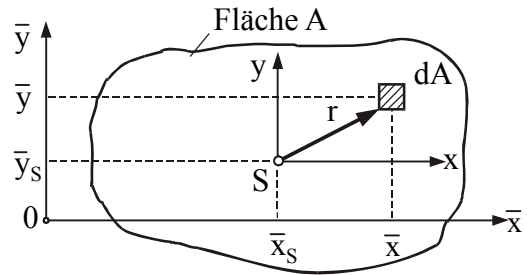
mit der Volumendehnung:  $e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$

# Flächenträgheitsmomente

(Flächenmomente 2. Ordnung)

## Axiale Flächenträgheitsmomente:

$$I_{xx} = \int_{(A)} y^2 dA, \quad I_{yy} = \int_{(A)} x^2 dA$$



## Zentrifugalmoment (Deviationsmoment):

$$I_{xy} = - \int_{(A)} x y dA$$

## Polares Flächenträgheitsmoment:

$$I_p = \int_{(A)} r^2 dA = \int_{(A)} (x^2 + y^2) dA = I_{xx} + I_{yy}$$

## Steinerscher Satz:

(Ursprung des Koordinatensystems  $x, y$  ist der Schwerpunkt  $S$ )

$$I_{\bar{x}\bar{x}} = I_{xx} + \bar{y}_S^2 A, \quad I_{\bar{y}\bar{y}} = I_{yy} + \bar{x}_S^2 A, \quad I_{\bar{x}\bar{y}} = I_{xy} - \bar{x}_S \bar{y}_S A$$

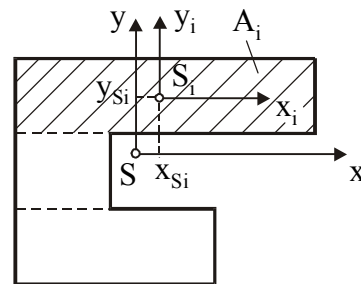
## Trägheitsmomente für zusammengesetzte Flächen:

( $n$  Teilflächen)

$$I_{xx} = \sum_{i=1}^n (I_{x_i x_i} + y_{S_i}^2 A_i)$$

$$I_{yy} = \sum_{i=1}^n (I_{y_i y_i} + x_{S_i}^2 A_i)$$

$$I_{xy} = \sum_{i=1}^n (I_{x_i y_i} - x_{S_i} y_{S_i} A_i)$$

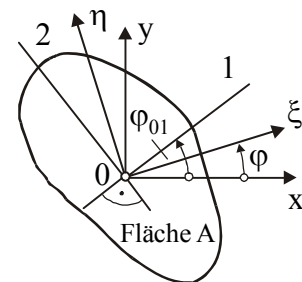


## Flächenträgheitsmomente bezüglich eines gedrehten Koordinatensystems:

$$I_{\xi\xi} = \frac{1}{2}(I_{xx} + I_{yy}) + \frac{1}{2}(I_{xx} - I_{yy}) \cos 2\varphi + I_{xy} \sin 2\varphi$$

$$I_{\eta\eta} = \frac{1}{2}(I_{xx} + I_{yy}) - \frac{1}{2}(I_{xx} - I_{yy}) \cos 2\varphi - I_{xy} \sin 2\varphi$$

$$I_{\xi\eta} = -\frac{1}{2}(I_{xx} - I_{yy}) \sin 2\varphi + I_{xy} \cos 2\varphi$$



## Hauptträgheitsmomente:

$$I_1 = I_{\max} = \frac{1}{2}(I_{xx} + I_{yy}) + \sqrt{\frac{1}{4}(I_{xx} - I_{yy})^2 + I_{xy}^2}$$

$$I_2 = I_{\min} = \frac{1}{2}(I_{xx} + I_{yy}) - \sqrt{\frac{1}{4}(I_{xx} - I_{yy})^2 + I_{xy}^2}$$

## Richtung der Hauptträgheitsachsen:

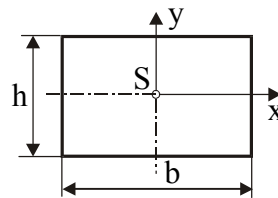
$$\tan\varphi_{01} = \frac{I_1 - I_{xx}}{I_{xy}} = \frac{I_{yy} - I_2}{I_{xy}}, \quad \varphi_{02} = \varphi_{01} + \frac{\pi}{2}$$

Für  $\varphi = \varphi_{01}$  gilt:  $I_{\xi\xi} = I_1, \quad I_{\eta\eta} = I_2, \quad I_{\xi\eta} = 0$

## Trägheitsmomente einfacher Flächen:

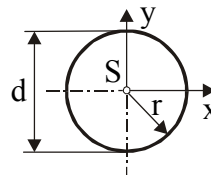
Rechteck:

$$I_{xx} = \frac{bh^3}{12}, \quad I_{yy} = \frac{hb^3}{12}, \quad I_{xy} = 0$$



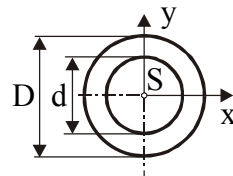
Kreis:

$$I_{xx} = I_{yy} = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi r^4}{4}, \quad I_{xy} = 0$$



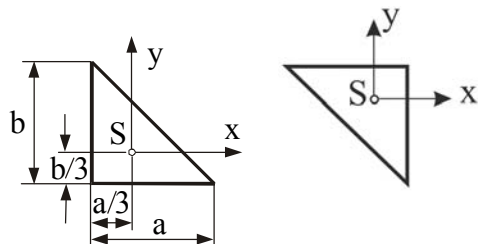
Kreisring:

$$I_{xx} = I_{yy} = \frac{\pi}{64}(D^4 - d^4), \quad I_{xy} = 0$$



Rechtwinkliges Dreieck:

$$I_{xx} = \frac{ab^3}{36}, \quad I_{yy} = \frac{ba^3}{36}, \quad I_{xy} = \frac{a^2b^2}{72}$$



$$I_{xx} = \frac{ab^3}{36}, \quad I_{yy} = \frac{ba^3}{36}, \quad I_{xy} = \frac{a^2b^2}{72}$$

# Zug und Druck

**Normalspannung:**  $\sigma(z) = \frac{F_1(z)}{A(z)}$

$F_1(z)$  - Längskraft  
 $A(z)$  - Querschnittsfläche

**Dehnung/Verschiebung:**  $\varepsilon(z) = \frac{dw(z)}{dz} = \frac{\sigma(z)}{E} + \alpha \Delta T = \frac{F_1(z)}{EA(z)} + \alpha \Delta T$

$$w(z) = \int \left( \frac{F_1(z)}{EA(z)} + \alpha \Delta T \right) dz + C$$

$EA(z)$  - Dehnsteifigkeit  
 $w(z)$  - Verschiebung in z-Richtung

## Verlängerung eines Stabes der Länge l:

$$\Delta l = \int_0^l \varepsilon(z) dz$$

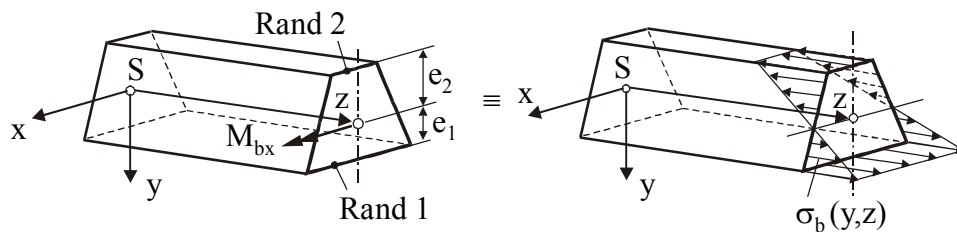
**Sonderfall**  $F_1 = \text{konst.}$ ,  $A = \text{konst.}$ ,  $\varepsilon = \text{konst.}$ ,  $\Delta T = 0$ :

$$\Delta l = \varepsilon l = \frac{F_1 l}{EA}$$

## Biegung

*Die Koordinatenachsen x, y sind Hauptzentralachsen!*

### Normalspannungen bei gerader Biegung



$$\sigma(y, z) = \frac{M_{bx}(z)}{I_{xx}} y$$

Randfaserspannungen:

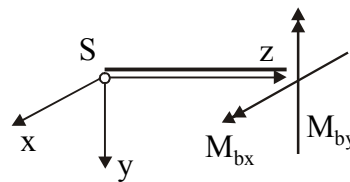
$$\text{Rand 1: } \sigma_{R1}(z) = \frac{M_{bx}(z)}{I_{xx}} e_1, \quad |\sigma_{R1}(z)| = \frac{|M_{bx}(z)|}{W_{b1}}, \quad W_{b1} = \frac{I_{xx}}{e_1}$$

$$\text{Rand 2: } \sigma_{R2}(z) = -\frac{M_{bx}(z)}{I_{xx}} e_2, \quad |\sigma_{R2}(z)| = \frac{|M_{bx}(z)|}{W_{b2}}, \quad W_{b2} = \frac{I_{xx}}{e_2}$$

$W_{b1}, W_{b2}$  – (Biege-)Widerstandsmomente

## Normalspannungen bei schiefer Biegung

$$\sigma(x, y, z) = \frac{M_{bx}(z)}{I_{xx}} y + \frac{M_{by}(z)}{I_{yy}} x$$



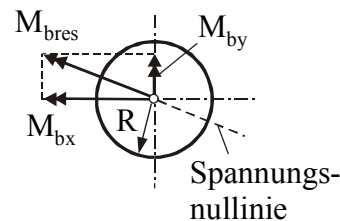
Spannungsnulllinie:

$$y = -\frac{I_{xx}}{I_{yy}} \frac{M_{by}}{M_{bx}} x$$

Randfaserspannungen bei kreisförmigem Querschnitt ( $I_{xx} = I_{yy}$ ):

$$|\sigma_R| = \frac{M_{bres}}{W_b} \quad \text{mit} \quad W_b = \frac{I_{xx}}{R}$$

$$M_{bres} = \sqrt{M_{bx}^2 + M_{by}^2}$$



## Verformung bei gerader Biegung

Differentialgleichung der Biegelinie 2. Ordnung:

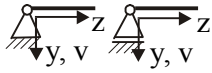
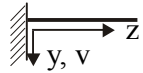
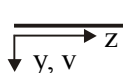

$$EI_{xx} v''(z) = -M_{bx}(z) \quad EI_{xx} \text{ - Biegesteifigkeit}$$

Differentialgleichung der Biegelinie 4. Ordnung:

$$(EI_{xx} v''(z))'' = q_y(z), \quad \text{wegen} \quad F_{qy} = \frac{dM_{bx}}{dz}, \quad q_y = -\frac{dF_{qy}}{dz}$$



Randbedingungen:

Lagerungsart	Geometrische Randbedingungen	Dynamische Randbedingungen
	$v(z=0) = 0$	$M_{bx}(z=0) = 0$
	$v(z=0) = 0$ $v'(z=0) = 0$	
freier Rand 		$M_{bx}(z=0) = 0$ $F_{qy}(z=0) = 0$
	$v'(z=0) = 0$	$F_{qy}(z=0) = 0$

## Torsion

### de Saint Venantsche Torsion:

Voraussetzungen:

- Beanspruchung nur durch  $M_t = \text{konst.}$ , Querschnitt konst.
- keine Behinderung der Querschnittsverwölbung
- Querschnittsform bleibt erhalten

**Maximale Schubspannung:**  $\tau_{\max} = \frac{M_t}{W_t}$

$M_t$  - Torsionsmoment

$W_t$  - Torsionswiderstandsmoment (s. unten)

**Drillung/Verdrehwinkel:**  $\vartheta = \frac{d\varphi}{dz} = \frac{M_t}{GI_t}$

$$\varphi(z) = \int \frac{M_t}{GI_t} dz + c = \frac{M_t}{GI_t} z + c$$

$\vartheta$  - Drillung

$\varphi(z)$  - Verdrehwinkel

$I_t$  - Torsionsträgheitsmoment (Torsionsflächenmoment, s. unten)

$GI_t$  - Torsionssteifigkeit

### Relativer Verdrehwinkel eines Torsionsstabes der Länge l:

$$\Delta\varphi = \varphi(z=1) - \varphi(z=0) = \frac{M_t l}{GI_t}$$

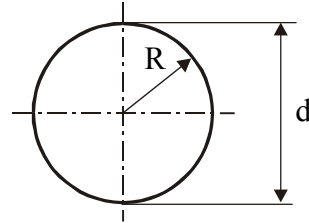
## Torsionsträgheitsmomente und Torsionswiderstandsmomente verschiedener Querschnittsformen:

### Kreis- und Kreisringquerschnitt

( $M_t = \text{konst.}$  nicht notwendig, Querschnitt bleibt eben)

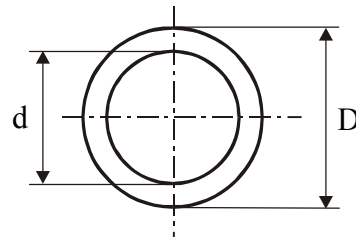
$$I_t = I_p = \frac{\pi R^4}{2} = \frac{\pi d^4}{32}$$

$$W_t = \frac{I_p}{R} = \frac{\pi R^3}{2} = \frac{\pi d^3}{16}$$



$$I_t = I_p = \frac{\pi}{32} (D^4 - d^4)$$

$$W_t = \frac{I_p}{\frac{D}{2}} = \frac{\pi}{16} \frac{D^4 - d^4}{D}$$



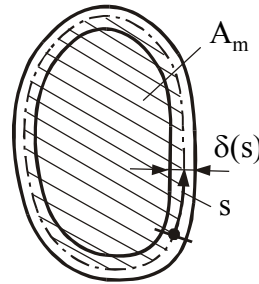
( $I_p$  – Polares Flächenträgheitsmoment)

### Dünnwandige geschlossene Querschnitte

$$I_t = \frac{4A_m^2}{\oint \frac{ds}{\delta(s)}} \quad (2. \text{ Bredtsche Formel})$$

$$W_t = 2 A_m \delta_{\min}$$

$$\tau(s) = \frac{M_t}{2A_m \delta(s)} \quad (1. \text{ Bredtsche Formel})$$

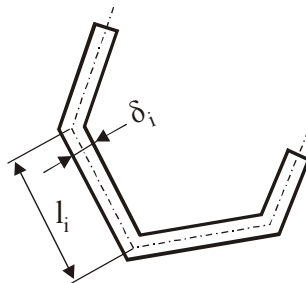


### Dünnwandige offene Querschnitte

(Dicke abschnittsweise konstant)

$$I_t = \frac{1}{3} \sum l_i \delta_i^3$$

$$W_t = \frac{I_t}{\delta_{\max}}$$



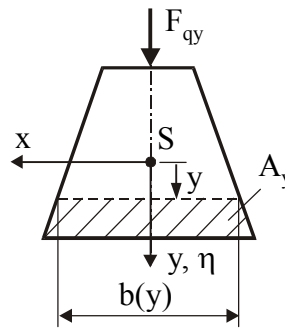
# Schubbeanspruchung durch Querkräfte

## Vollquerschnitte

Vertikale Schubspannung:

$$\tau_v(y,z) = \frac{F_{qy}(z) S_x(y)}{I_{xx} b(y)}$$

$$S_x(y) = \int_{(A_y)} \eta dA$$



Rechteckquerschnitt (Breite b, Höhe h):

$$\tau(y,z) = \tau_v(y,z) = \frac{3}{2} \left[ 1 - 4 \left( \frac{y}{h} \right)^2 \right] \tau_m$$

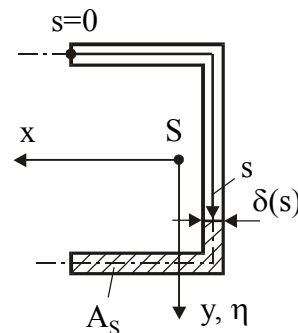
Mittlere Schubspannung:  $\tau_m = \frac{F_q(z)}{bh}$

## Dünnwandige offene Profile (x,y-Hauptachsen):

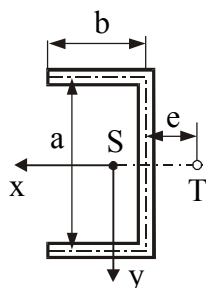
$$\tau(s,z) = \frac{F_{qy}(z) S_x(s)}{I_{xx} \delta(s)}$$

mit  $S_x(s) = \int_{(A_s)} \eta dA$

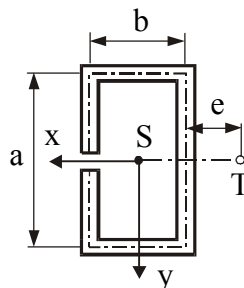
Schubfluß:  $t(s,z) = \tau(s,z) \delta(s) = \frac{F_{qy}(z) S_x(s)}{I_{xx}}$



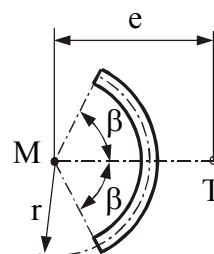
## Schubmittelpunkt für ausgewählte Querschnitte:



$$e = \frac{3b^2}{a + 6b}$$



$$e = \frac{b(2a + 3b)}{2a + 6b}$$



$$e = \frac{2r(\sin \beta - \beta \cos \beta)}{\beta - \sin \beta \cos \beta}$$

## Zusammengesetzte Beanspruchungen

### Gesamtnormalspannung:

$$\sigma = \frac{F_l}{A} + \frac{M_{bx}}{I_{xx}} y + \frac{M_{by}}{I_{yy}} x$$

x, y - Hauptzentralachsen

*betragsgrößte Normalspannung bei Kreis- und Kreisringquerschnitten (vgl. auch Seite 14):*

$$|\sigma|_{\max} = \frac{|F_l|}{A} + \frac{M_{\text{bres}}}{W_b}$$

### Vergleichsspannungen:

Hauptspannungshypothese  $\sigma_{V1} = \sigma_1$

Hauptdehnungshypothese  $\sigma_{V2} = \sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)$

Schubspannungshypothese  $\sigma_{V3} = \sigma_1 - \sigma_3$

Gestaltänderungshypothese  $\sigma_{V4} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]}$

### Vergleichsspannungen für Stabtragwerke:

(nur eine Normalspannung und eine Schubspannung)

$$\sigma_{V1} = \frac{1}{2} \left[ \sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \right]$$

$$\sigma_{V2} = \frac{1}{2} \left[ (1 - \nu)\sigma + (1 + \nu)\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \right]$$

$$\sigma_{V3} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$$

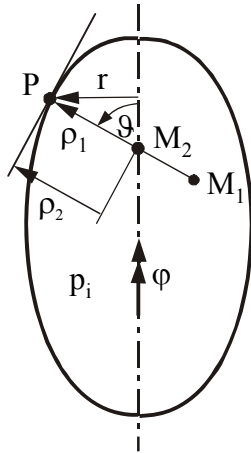
$$\sigma_{V4} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}$$

### Vergleichsspannung nach der Gestaltänderungshypothese für den ebenen Spannungszustand:

$$\sigma_{V4} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\tau_{xy}^2}$$

# Rotationssymmetrische Spannungszustände

## Dünnwandige Behälter unter Innendruck $p_i$ (Rotationsschale, Membranspannungen)



Für beliebigen Punkt P:

- $\rho_1$  - Krümmungsradius der Meridiankurve
- $r = \rho_2 \sin \vartheta$  - Breitenkreisradius
- $h$  - Wanddicke
- $\varphi$  - Meridianwinkel

Radialspannung vernachlässigbar klein.

	Allgemein	Kreiszylinder ( $\rho_1 \rightarrow \infty, \vartheta \equiv \pi/2, \rho_2 \equiv r$ )
<b>Meridianspannung</b> (Längsspannung)	$\sigma_{\vartheta} = \frac{p_i \rho_2}{2h}$	$\sigma_{\vartheta} \equiv \sigma_z = \frac{p_i \pi r}{2\pi r h} = \frac{p_i r}{2h}$
<b>Ringspannung</b> (Umfangsspannung)	$\sigma_{\varphi} = \frac{p_i \rho_2}{h} \left( 1 - \frac{\rho_2}{2\rho_1} \right)$	$\sigma_{\varphi} = \frac{p_i 2r L}{2h L} = \frac{p_i r}{h}$

## Dickwandige Rohre und rotierende Kreisscheiben konstanter Dicke

- $r$  - radiale Koordinate
- $E$  - Elastizitätsmodul
- $\rho$  - Dichte
- $\nu$  - Querkontraktionszahl
- $\omega = \text{konst.}$  - Winkelgeschwindigkeit

- Längs- bzw. Axialspannung:  $\sigma_z = \text{konst.}$

- Radialspannung:  $\sigma_r(r) = C_1 + \frac{C_2}{r^2} - \frac{3+\nu}{8} \rho \omega^2 r^2$

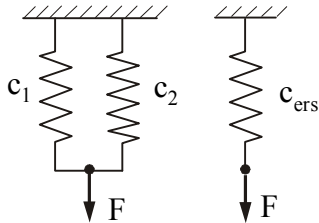
- Ringspannung:  $\sigma_{\varphi}(r) = C_1 - \frac{C_2}{r^2} - \frac{1+3\nu}{8} \rho \omega^2 r^2$

- Radialverschiebung:  $u(r) = \frac{r}{E} \left[ (1-\nu)C_1 - (1+\nu)\frac{C_2}{r^2} - \frac{1-\nu^2}{8} \rho \omega^2 r^2 - \nu \sigma_z \right]$

# Federsteifigkeiten und Einflußzahlen

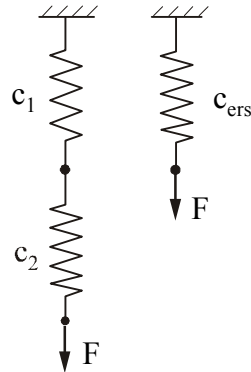
## Ersatzfedersteifigkeiten $c_{\text{ers}}$ für Federsysteme

Parallelanordnung von Feder



$$c_{\text{ers}} = c_1 + c_2$$

Reihenanzordnung von Federn



$$\frac{1}{c_{\text{ers}}} = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2}$$

## Einflußzahlen

Durchbiegung: 
$$v_i = \sum_{k=1}^n (\alpha_{ik} F_k + \gamma_{ik} M_k)$$

Biegewinkel: 
$$\varphi_i = \sum_{k=1}^n (\delta_{ik} F_k + \beta_{ik} M_k)$$

Symmetriegesetz der Einflußzahlen (Maxwell-Betti):

$$\alpha_{ik} = \alpha_{ki} \quad \gamma_{ik} = \delta_{ki} \quad \beta_{ik} = \beta_{ki}$$

# Formänderungsenergie und Satz von Castigliano

## Formänderungsenergie

Feder unter Kraft- bzw. Momentenbelastung

$$W = \frac{F^2}{2c} \quad \text{bzw.} \quad W = \frac{M^2}{2c_d}$$

System aus Balken und Stäben

$$W = \frac{1}{2} \int_{(I)} \left\{ \frac{M_{bx}^2}{EI_{xx}} + \frac{M_{by}^2}{EI_{yy}} + \frac{M_t^2}{GI_t} + \frac{F_l^2}{EA} + \kappa_y \frac{F_{qy}^2}{GA} + \kappa_x \frac{F_{qx}^2}{GA} \right\} dz$$

(bereichsweise Integration über das gesamte System)

Formzahlen:  $\kappa_y = \frac{A}{I_{xx}^2} \int_{(A)} \left( \frac{S_x(y)}{b(y)} \right)^2 dA$ ,  $\kappa_x$  - analog

für Rechteckquerschnitt:  $\kappa_x = \kappa_y = \frac{6}{5}$   
für Kreisquerschnitt:  $\kappa_x = \kappa_y = \frac{10}{9}$

## Satz von Castigliano

$$v_i = \frac{\partial W}{\partial F_i}, \quad \varphi_i = \frac{\partial W}{\partial M_i}$$

$v_i$  - Verschiebung des Kraftangriffspunktes einer äußeren Kraft  $F_i$  in Krafrichtung

$\varphi_i$  - Verdrehwinkel am Angriffspunkt eines äußeren Momentes  $M_i$  in Momentenrichtung

$W$  - Formänderungsarbeit des gesamten Systems

### Voraussetzungen:

Hookesches Gesetz, konstante Temperatur, kleine Verformungen

Beispiel für die allgemeine Ausführung der partiellen Ableitung:

$$W = \frac{1}{2} \int_{(I)} \frac{M_b^2}{EI} dz, \quad v_i = \frac{\partial W}{\partial F_i} = \int_{(I)} \frac{M_b}{EI} \frac{\partial M_b}{\partial F_i} dz.$$

In ebenen symmetrischen Tragwerken gilt im Symmetrieschnitt:

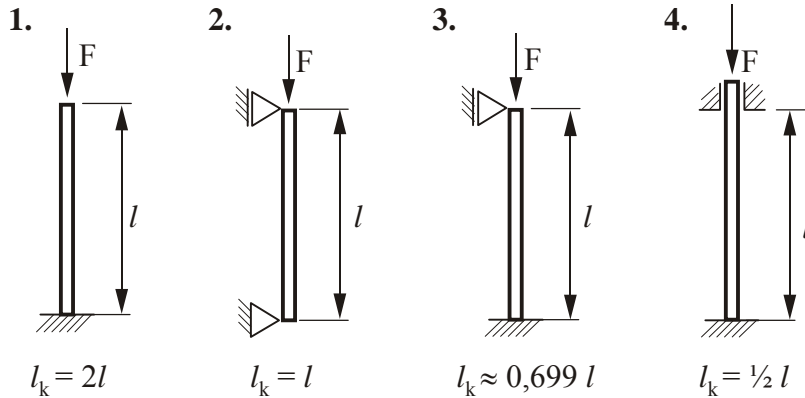
- bei symmetrischer Belastung:  $F_q = 0$
- bei antimetrischer Belastung:  $F_l = 0, M_b = 0$
- für beide Fälle gilt: es verschwinden dort die Verformungen in Richtung der nichtverschwindenden Schnittgrößen

# Knickung gerader Stäbe

## Elastische Knickung; die Eulerfälle

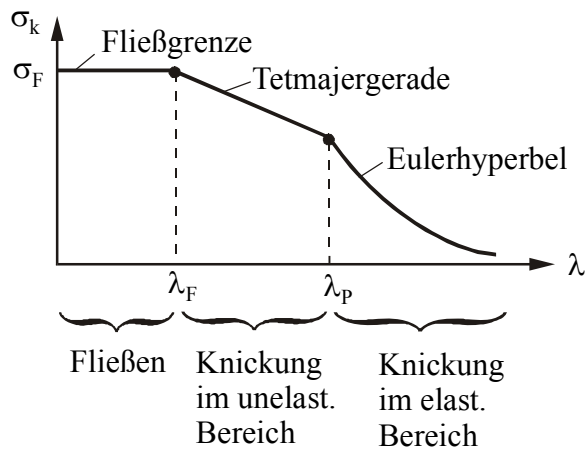
Knicklast (kritische Last):  $F_k = \frac{\pi^2 EI}{l_k^2}$  (Eulerformel)

Bedingung:  $\lambda \geq \lambda_p$  (siehe unelastisches Knicken)



## Unelastische Knickung

Kritische Spannung  $\sigma_k$ :



Schlankheitsgrad:  $\lambda = \frac{l_k}{i}$  , Trägheitsradius:  $i = \sqrt{\frac{I}{A}}$

Euler (für  $\lambda \geq \lambda_p$ ):  $\sigma_k = \frac{F_k}{A} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$

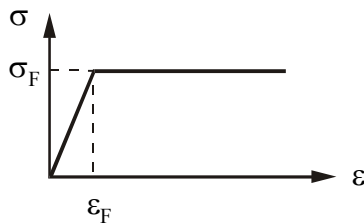
Tetmajer (für  $\lambda_F \leq \lambda \leq \lambda_p$ ):  $\sigma_k = a - b\lambda$

Grenzschlankheitsgrad:  $\lambda_p = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_p}}$



# Elastisch-plastisches Materialverhalten

## Elastisch-idealplastisches Materialverhalten



$$\sigma = E\varepsilon \quad \text{für } \varepsilon \leq \varepsilon_F$$

$$\sigma = \sigma_F \quad \text{für } \varepsilon > \varepsilon_F$$

## Tragwerke aus Stäben

Elastische Grenzlaster: Für mindestens einen Stab des Tragwerks wird  $\sigma = \sigma_F$  erreicht.

Traglast: Für mindestens einen Stab des statisch bestimmten (Rest-) Tragwerks wird  $\sigma = \sigma_F$  erreicht.

→ *Übergang zu einer beweglichen Struktur (Mechanismus)*

## Balken mit Biegebeanspruchung

Elastisches Grenzmoment  $M_{b_{el}}$ :

An einer Stelle des Balkens wird eine Randspannung vom Betrag  $\sigma = \sigma_F$  erreicht.

Vollplastisches Moment  $M_{b_{pl}}$ :

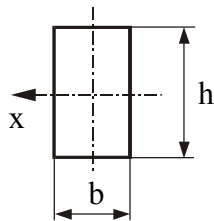
An einer Stelle des Balkens erreicht die Spannung im gesamten Querschnitt den Betrag  $\sigma = \sigma_F$

→ *Bildung eines plastischen Gelenks*

Traglast:

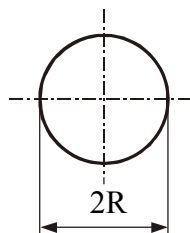
Die Traglast wird erreicht, wenn in einem statisch bestimmten (Rest-) Tragwerk ein plastisches Gelenk entsteht.

Beispiele:



$$M_{b_{el_x}} = \frac{1}{6} \sigma_F b h^2$$

$$M_{b_{pl_x}} = \frac{1}{4} \sigma_F b h^2$$



$$M_{b_{el}} = \frac{\pi}{4} \sigma_F R^3$$

$$M_{b_{pl}} = \frac{4}{3} \sigma_F R^3$$



# Kinematik und Kinetik

## Kinematik des Punktes

### Grundlegende Begriffe

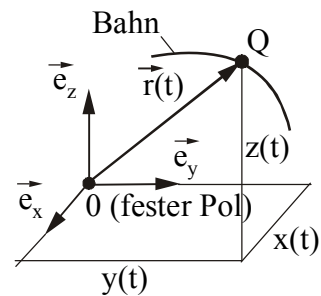
Bahn eines beliebigen Punktes Q

Ortsvektor	$\vec{r}(t)$
Geschwindigkeitsvektor	$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \equiv \dot{\vec{r}}$
Beschleunigungsvektor	$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \equiv \ddot{\vec{r}}$

### Kartesische Koordinaten x, y, z

Einheitsvektoren  $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &= x(t) \vec{e}_x + y(t) \vec{e}_y + z(t) \vec{e}_z \\ \vec{v}(t) &= v_x(t) \vec{e}_x + v_y(t) \vec{e}_y + v_z(t) \vec{e}_z \\ v_x &= \dot{x}, \quad v_y = \dot{y}, \quad v_z = \dot{z} \\ v &= |\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \\ \vec{a}(t) &= a_x(t) \vec{e}_x + a_y(t) \vec{e}_y + a_z(t) \vec{e}_z \\ a_x &= \dot{v}_x = \ddot{x}, \quad a_y = \dot{v}_y = \ddot{y}, \quad a_z = \dot{v}_z = \ddot{z} \\ a &= |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \end{aligned}$$



### Bahnkoordinaten (natürliche Koordinaten)

Bewegungsgesetz auf der vorgegebenen, i.a. räumlichen Bahn:  $s = s(t)$

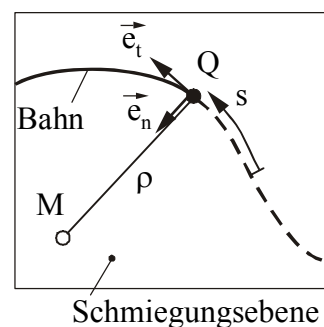
Hauptkrümmungsmittelpunkt  $M = M(s)$ ,

Hauptkrümmungsradius  $\rho = \rho(s)$ ,

Normaleneinheitsvektor  $\vec{e}_n$ , Tangenteneinheitsvektor  $\vec{e}_t$

$M, \rho, \vec{e}_n, \vec{e}_t$  liegen in der Schmiegungeebene, die Bahnkurve i.a. nicht.

$$\begin{aligned} \vec{v}(t) &= v_t(t) \vec{e}_t \\ v_t &= \dot{s}, \quad v = |\vec{v}| = v_t \\ \vec{a}(t) &= a_n(t) \vec{e}_n + a_t(t) \vec{e}_t \\ a_n &= \frac{v^2}{\rho}, \quad a_t = \dot{v}_t = \ddot{s} \\ a &= |\vec{a}| = \sqrt{a_n^2 + a_t^2} \end{aligned}$$



## Zylinderkoordinaten $r, \varphi, z$

Einheitsvektoren  $\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z$

$$\vec{R}(t) = r(t) \vec{e}_r + z(t) \vec{e}_z$$

$$|\vec{R}| = \sqrt{r^2 + z^2}$$

$$\vec{v}(t) = v_r(t) \vec{e}_r + v_\varphi(t) \vec{e}_\varphi + v_z(t) \vec{e}_z$$

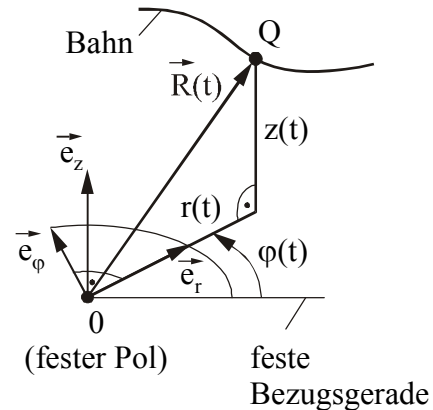
$$v_r = \dot{r}, \quad v_\varphi = r \dot{\varphi}, \quad v_z = \dot{z}$$

$$v = |\vec{v}| = \sqrt{v_r^2 + v_\varphi^2 + v_z^2}$$

$$\vec{a}(t) = a_r(t) \vec{e}_r + a_\varphi(t) \vec{e}_\varphi + a_z(t) \vec{e}_z$$

$$a_r = \ddot{r} - r \dot{\varphi}^2, \quad a_\varphi = r \ddot{\varphi} + 2\dot{r} \dot{\varphi}, \quad a_z = \ddot{z}$$

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{a_r^2 + a_\varphi^2 + a_z^2}$$



Sonderfall: ebene Polarkoordinaten  $r, \varphi$

$$\vec{R} \equiv \vec{r}$$

$$|\vec{R}| \equiv |\vec{r}| \equiv r, \quad z \equiv 0, \quad v_z \equiv 0, \quad a_z \equiv 0$$

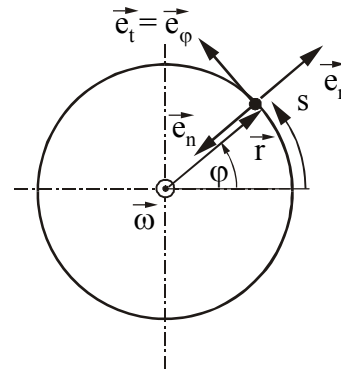
## Bewegung auf einer Kreisbahn mit dem Radius $r$

= Sonderfall für Bahnkoordinaten ( $\rho=r=\text{konst.}$ ) **bzw.** ebene Polarkoordinaten ( $|\vec{r}| = r = \text{konst.}$ )

Bewegungskordinate:  $\varphi$  oder  $s = r\varphi$

Winkelgeschwindigkeit:  $\omega = \dot{\varphi}$

Winkelbeschleunigung:  $\alpha = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}$



$$\vec{r}(t) = -r \vec{e}_n$$

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$\vec{v} = v(t) \vec{e}_t$$

Geschwindigkeitsbetrag:

$$\vec{a} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}$$

$$\vec{a} = a_n(t) \vec{e}_n + a_t(t) \vec{e}_t$$

Zentripetalbeschleunigung:

Tangentialbeschleunigung:

**bzw.**  $\vec{r}(t) = r \vec{e}_r$

**bzw.**  $\vec{v} = v_\varphi(t) \vec{e}_\varphi$

$$v \equiv v_\varphi = \dot{s} = r \dot{\varphi} = r\omega$$

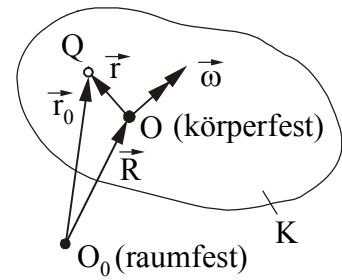
**bzw.**  $\vec{a} = a_r(t) \vec{e}_r + a_\varphi(t) \vec{e}_\varphi$

$$a_n = -a_r = \frac{v^2}{r} = r \dot{\varphi}^2 = r\omega^2$$

$$a_t = a_\varphi = \dot{v} = \dot{s} = r \ddot{\varphi} = r\dot{\omega} = r\alpha$$

## Relativbewegung

Punkt Q bewege sich relativ zu einem translatorisch ( $\vec{R}(t)$ ) und rotatorisch ( $\vec{\omega}(t)$ ) bewegten starren Körper (Bezugssystem) K.



Relativbewegung  $\vec{r} = \vec{r}(t)$

Führungsbewegung  $\vec{R} = \vec{R}(t), \vec{\omega} = \vec{\omega}(t)$

Ortsvektor  $\vec{r}_0 = \vec{R} + \vec{r}$

Absolute zeitliche Ableitung von  $\vec{r}(t)$  bei körperfesten Einheitsvektoren  $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$  wie folgt darstellbar:

$$\dot{\vec{r}}(t) = \frac{d'\vec{r}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{r}, \quad \frac{d'\vec{r}}{dt} = \dot{r}_x \vec{e}_x + \dot{r}_y \vec{e}_y + \dot{r}_z \vec{e}_z$$

Absolutgeschwindigkeit  $\vec{v} = \vec{v}_{\text{rel}} + \vec{v}_f$

Relativgeschwindigkeit  $\vec{v}_{\text{rel}} = \frac{d'\vec{r}}{dt}$

Führungsgeschwindigkeit  $\vec{v}_f = \dot{\vec{R}} + \vec{\omega} \times \vec{r}$

Absolutbeschleunigung  $\vec{a} = \vec{a}_{\text{rel}} + \vec{a}_f + \vec{a}_C$

Relativbeschleunigung  $\vec{a}_{\text{rel}} = \frac{d'\vec{v}_{\text{rel}}}{dt} = \frac{d'^2\vec{r}}{dt^2}$

Führungsbeschleunigung  $\vec{a}_f = \ddot{\vec{R}} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}$

Zentripetalbeschleunigung  $\vec{a}_Z = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$

Coriolisbeschleunigung  $\vec{a}_C = 2\vec{\omega} \times \vec{v}_{\text{rel}} = 2\vec{\omega} \times \frac{d'\vec{r}}{dt}$

## Geschwindigkeits- und Beschleunigungsverteilung im starren Körper

$$\frac{d'\vec{r}}{dt} = \vec{0}$$

$$\vec{v} = \dot{\vec{R}} + \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (\text{Eulerformel})$$

$$\vec{a} = \ddot{\vec{R}} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

# Ebene Bewegung eines starren Körpers

Alle Körperpunkte bewegen sich auf zu einer raumfesten Bezugsebene parallelen Ebenen.

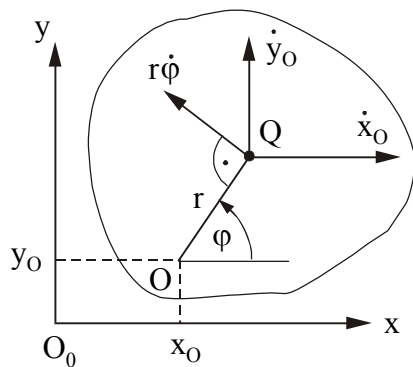
$O_0$  raumfester Bezugspunkt

$O$  körperfester Bezugspunkt

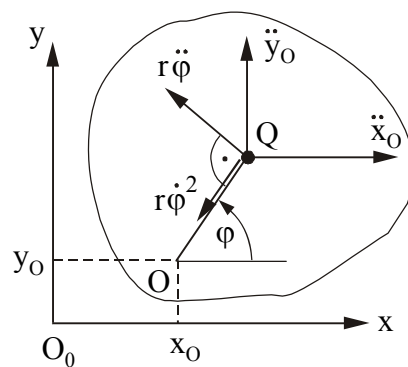
Jede ebene Bewegung eines starren Körpers kann zerlegt werden in

- eine ebene Translation entsprechend der ebenen Bewegung des körperfesten Bezugspunktes  $O$  und
- eine Rotation um die Achse senkrecht zur Bezugsebene durch  $O$ .

Geschwindigkeitskomponenten

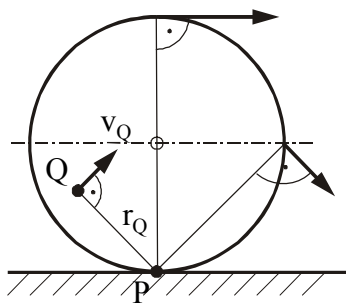


Beschleunigungskomponenten



Es gibt immer einen körperfesten Punkt  $P$ , den Momentanpol, dessen momentane Absolutgeschwindigkeit verschwindet. Im Momentanpol schneiden sich die Normalen der Geschwindigkeitsvektoren aller Punkte der Ebene. Die Bewegung kann momentan als Rotation um eine Achse senkrecht zur Bewegungsebene durch  $P$  betrachtet werden.

Beispiel: gleitfrei abrollendes Rad



$$v_Q = r_Q \omega$$

# Grundaufgaben der Kinematik

Im folgenden stehen  $s, v, a$  z.B. für:  $x, v_x, a_x$   
 $s, v, a_t$   
 $\varphi, \omega, \alpha$

Es gilt:  $v = \frac{ds}{dt}, \quad a = \frac{dv}{dt} = v \frac{dv}{ds}$

Anfangsbedingungen:  $s(t = t_0) = s_0, \quad v(t = t_0) = v_0$

Gegeben	Anleitung zur Ermittlung der übrigen Funktionen	
$s = s(t)$	$v(t) = \frac{ds}{dt}$	$a(t) = \frac{dv}{dt}$
$v = v(t)$	$s(t) = s_0 + \int_{t_0}^t v(\bar{t}) d\bar{t}$	$a(t) = \frac{dv}{dt}$
$a = a(t)$	$v(t) = v_0 + \int_{t_0}^t a(\bar{t}) d\bar{t}$	$s(t) = s_0 + \int_{t_0}^t v(\bar{t}) d\bar{t}$
$v = v(s)$	$t(s) = t_0 + \int_{s_0}^s \frac{d\bar{s}}{v(\bar{s})}$	$a(s) = v(s) \frac{dv(s)}{ds}$
$a = a(s)$	$v^2(s) = v_0^2 + 2 \int_{s_0}^s a(\bar{s}) d\bar{s}$	$t(s) = t_0 + \int_{s_0}^s \frac{d\bar{s}}{v(\bar{s})}$
$a = a(v)$	$t(v) = t_0 + \int_{v_0}^v \frac{d\bar{v}}{a(\bar{v})}$	$s(v) = s_0 + \int_{v_0}^v \frac{\bar{v}}{a(\bar{v})} d\bar{v}$

# Massenträgheitsmomente eines starren Körpers

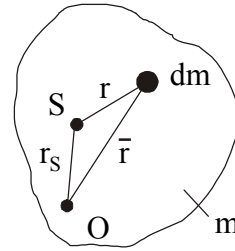
## (Axiales) Massenträgheitsmoment bei vorgegebener Bezugsachse

Bezugsachsen senkrecht zur Zeichenebene

durch Massenmittelpunkt S:  $J_S = \int_{(m)} r^2 dm$

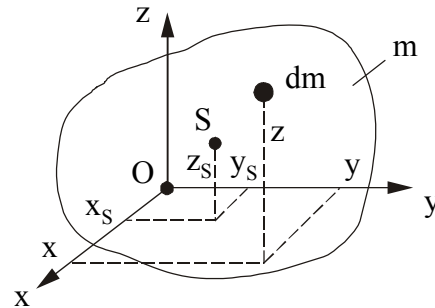
durch beliebigen Punkt O:  $J_O = \int_{(m)} \bar{r}^2 dm$

Satz von Steiner:  $J_O = J_S + m r_S^2$



## Trägheitsmatrix für ein kartesisches Koordinatensystem

$$\mathbf{J}_O = \begin{bmatrix} J_{Oxx} & J_{Oxy} & J_{Oxz} \\ J_{Oyx} & J_{Oyy} & J_{Oyz} \\ J_{Ozx} & J_{Ozy} & J_{Ozz} \end{bmatrix}$$



(Axiale) Massenträgheitsmomente

$$J_{Oxx} = \int_{(m)} (y^2 + z^2) dm$$

$$J_{Oyy} = \int_{(m)} (z^2 + x^2) dm$$

$$J_{Ozz} = \int_{(m)} (x^2 + y^2) dm$$

Deviationsmomente (Zentrifugalmomente)

$$J_{Oxy} = J_{Oyx} = - \int_{(m)} xy dm$$

$$J_{Oyz} = J_{Ozy} = - \int_{(m)} yz dm$$

$$J_{Ozx} = J_{Oxz} = - \int_{(m)} zx dm$$

Satz von Steiner

$$J_{Oxx} = J_{Sxx} + (y_S^2 + z_S^2)m, \quad J_{Oxy} = J_{Sxy} - x_S y_S m$$

$$J_{Oyy} = J_{Syy} + (z_S^2 + x_S^2)m, \quad J_{Oyz} = J_{Syz} - y_S z_S m$$

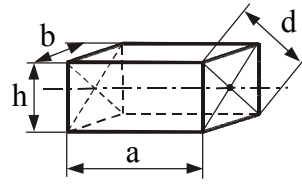
$$J_{Ozz} = J_{Szz} + (x_S^2 + y_S^2)m, \quad J_{Ozx} = J_{Szx} - z_S x_S m$$



## Massenträgheitsmomente ausgewählter homogener Körper bezüglich Schwerpunktsachsen ( - - - - - )

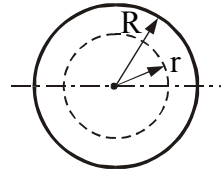
Quader

$$J = \frac{1}{12} m d^2 = \frac{1}{12} m (b^2 + h^2)$$



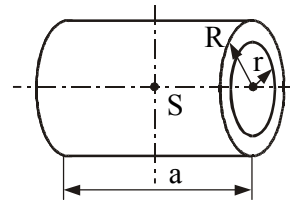
Hohlkugel

$$J = \frac{2}{5} m \frac{R^5 - r^5}{R^3 - r^3}$$



Kreisringzylinder, Längsachse

$$J = \frac{1}{2} m (R^2 + r^2)$$

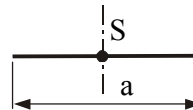


Kreisringzylinder, Querachse

$$J = \frac{1}{4} m \left( R^2 + r^2 + \frac{1}{3} a^2 \right)$$

Dünnere Stab (Querschnittsabmessungen  $\ll a$ )

$$J = \frac{1}{12} m a^2$$



## Hauptträgheitsmomente und Hauptträgheitsachsen

Axiales Massenträgheitsmoment für eine Achse in Richtung eines beliebigen Einheitsvektors  $\bar{e}_i$  mit dem Spaltenvektor seiner Komponenten  $\mathbf{e}_i = [e_{ix} \ e_{iy} \ e_{iz}]^T$ :

$$J_i = \mathbf{e}_i^T \mathbf{J} \mathbf{e}_i$$

Eigenwertgleichung zur Bestimmung der Hauptträgheitsmomente  $J_i$  ( $i=1, 2, 3$ ):

$$\det(\mathbf{J} - J_i \mathbf{E}) = 0, \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Gleichungen zur Bestimmung der Einheitsvektoren  $\bar{e}_i$  auf den Hauptträgheitsachsen:

$$(\mathbf{J} - J_i \mathbf{E}) \mathbf{e}_i = \mathbf{0} \equiv [0 \ 0 \ 0]^T, \quad e_{ix}^2 + e_{iy}^2 + e_{iz}^2 = 1$$

# Newton'sches (dynamisches) Grundgesetz

Für einen freien (d.h. keinen Zwangsbedingungen unterworfenen) Massenpunkt der Masse  $m$  gilt zwischen der Beschleunigung  $\vec{a}$  und der resultierenden Kraft  $\vec{F}$  die Beziehung

$$m\vec{a} = \vec{F}.$$

## d'Alembertsches Prinzip

Zurückführen eines kinetischen Problems auf ein statisches Problem mittels Ergänzen der eingepägten Kräfte und Momente durch die Massenbeschleunigungskräfte und –momente in negativer Beschleunigungs- und Winkelbeschleunigungsrichtung.

### Beispiele

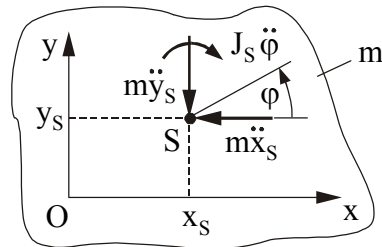
#### *Ebene Bewegung eines starren Körpers*

Massenbeschleunigungskräfte:

$$m\ddot{x}_S, m\ddot{y}_S$$

Massenbeschleunigungsmoment:

$$J_S\ddot{\phi}$$



#### *Bewegung eines Massenpunktes auf einer Kreisbahn*

Beschleunigungen:

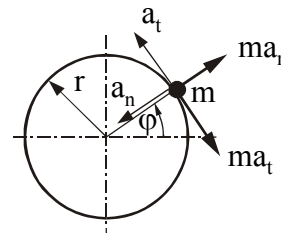
Normal-(Zentripetal)Beschleunigung  $a_n$

Tangentialbeschleunigung  $a_t$

Massenbeschleunigungskräfte:

$$m a_n = m r \dot{\phi}^2 = m \frac{v^2}{r} \text{ (Zentrifugalkraft)}$$

$$m a_t = m r \ddot{\phi}$$



# Arbeit, Leistung, Energie

## Arbeit und Leistung

	Kraft $\vec{F}$	Moment $\vec{M}$
Arbeit	$W = \int_{(1)}^{(2)} \vec{F} d\vec{r}$	$W = \int_{(1)}^{(2)} \vec{M} d\vec{\varphi}$
Leistung	$P = \vec{F} \vec{v}$	$P = \vec{M} \vec{\omega}$

## Potential (potentielle Energie)

Konservative Kräfte (Potentialkräfte)  $\vec{F} = \vec{F}(x, y, z)$  lassen sich aus einem Potential  $U = U(x, y, z)$  ableiten:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U = -\left(\vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}\right)U \quad \text{bzw.}$$

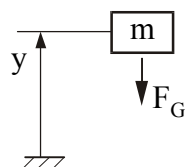
$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}$$

Für sie ist die Arbeit vom Integrationsweg unabhängig:

$$W = -\int_{(1)}^{(2)} dU = U_1 - U_2$$

### Beispiele:

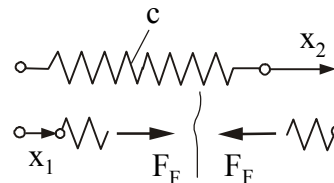
Potential der Gewichtskraft  $F_G$   
(homogenes Schwerfeld,  $g$ )



$$F_G = m g$$

$$U = m g y + C, \quad C = \text{konst.}$$

Potential der Federkraft  $F_F$   
(Federsteifigkeit  $c$ )



$$F_F = c(x_2 - x_1)$$

$$U = \frac{1}{2}c(x_2 - x_1)^2 = \frac{1}{2}c(x_1 - x_2)^2$$

## Kinetische Energie eines Massenpunktes

$$T = \frac{1}{2} m \bar{v}^2 = \frac{1}{2} m v^2, \quad v = |\bar{v}|$$

## Kinetische Energie eines starren Körpers

*Allgemein:*

$$T = T_{\text{tr}} + T_{\text{rot}}$$

Translationsenergie:  $T_{\text{tr}} = \frac{1}{2} m \bar{v}_S^2 = \frac{1}{2} m v_S^2$

$\bar{v}_S$ : Geschwindigkeit des Massenmittelpunktes

Rotationsenergie:  $T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{J}_S \boldsymbol{\omega}, \quad \boldsymbol{\omega}^T = [\omega_x \quad \omega_y \quad \omega_z]$

Für Hauptachsen x,y,z:  $T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} (J_{Sxx} \omega_x^2 + J_{Syy} \omega_y^2 + J_{Szz} \omega_z^2)$

*Starrer Körper mit Festlager O:*

Es gilt auch:  $T = T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{J}_O \boldsymbol{\omega}$

Für Hauptachsen x,y,z:  $T = T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} (J_{Oxx} \omega_x^2 + J_{Oyy} \omega_y^2 + J_{Ozz} \omega_z^2)$

*Starrer Körper bei ebener Bewegung*

(z.B. Rotation um raumfeste Achse):

$$T = \frac{1}{2} m v_S^2 + \frac{1}{2} J_S \omega^2$$

Bei starrem Körper mit Festlager O gilt auch:  $T = \frac{1}{2} J_O \omega^2$

(Bezugsachsen von  $J_S$  bzw.  $J_O$  senkrecht zur Bewegungsebene, nicht notwendig Hauptachsen)

## Arbeitssatz

$$W^{(e)} = \Delta T = T_2 - T_1$$

(in dieser Form gültig für Systeme ohne zeitabhängige starre Bindungen)

$W^{(e)}$  – Gesamtarbeit aller eingepprägten Kräfte und Momente

## Energiesatz

$$T_1 + U_1 + W^* = T_2 + U_2$$

$W^*$  - Gesamtarbeit aller eingepprägten nichtkonservativen Kräfte und Momente (Antrieb, Reibung, Dämpfung, ...)

## Energieerhaltungssatz

Für konservative Systeme gilt:  $T_1 + U_1 = T_2 + U_2$

$$T + U = \text{konst.}, \quad \frac{d}{dt}(T + U) = 0$$

## Lagrangesche Bewegungsgleichungen 2. Art

Vorschrift zur Herleitung der Bewegungsgleichungen für ein holonomes (nur integrable Zwangsbedingungen) mechanisches System mit  $f$  Freiheitsgraden:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = Q_k^*, \quad k = 1, \dots, f$$

mit  $L = L(q_1, \dots, q_f, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f, t) = T - U$

$L$  - Lagrangesche Funktion

$q_k$  - den Zwangsbedingungen genügende verallgemeinerte Koordinaten

$Q_k^*$  - verallgemeinerte eingeprägte, nichtkonservative Kräfte

Ermittlung der  $Q_k^*$  aus der virtuellen Arbeit aller eingepprägten nichtkonservativen Kräfte  $F_i^{(e)*}$  und Momente  $M_j^{(e)*}$  mittels Koeffizientenvergleich bei den  $\delta q_k$ :

$$\delta W^{(e)} = \sum_{(i)} F_i^{(e)*} \delta x_i + \sum_{(j)} M_j^{(e)*} \delta \varphi_j = \sum_{k=1}^f Q_k^* \delta q_k$$

$\delta$  - virtuelle differentielle Änderung (mit  $\delta t = 0$  bei  $dt \neq 0$ )

## Impuls und Drehimpuls (Drall)

### Impuls eines Massenpunktes der Masse $m$ :

$$\vec{p} = m \vec{v}$$

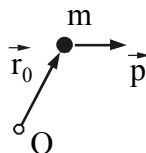
### Impuls eines beliebigen mechanischen Systems:

$$\vec{p} = m \vec{v}_S \quad 1. \text{ Schwerpunktsatz}$$

$\vec{v}_S$  - Geschwindigkeit des Massenmittelpunktes

### Drehimpuls eines Massenpunktes bezüglich eines raumfesten Punktes $O$ :

$$\vec{L}_O = \vec{r}_0 \times \vec{p}$$



Für ein beliebiges System ist über die entsprechenden Drehimpulse aller Massenelemente zu integrieren.

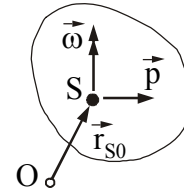
## Drehimpuls eines starren Körpers bezüglich eines raumfesten Punktes O:

Allgemein:

$$\vec{L}_O = \vec{r}_{S0} \times \vec{p} + \vec{L}_S$$

Drehimpuls bezüglich des Massenmittelpunktes S:

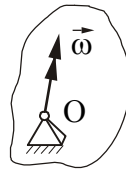
$$\mathbf{L}_S = \begin{bmatrix} L_{Sx} & L_{Sy} & L_{Sz} \end{bmatrix}^T = \mathbf{J}_S \boldsymbol{\omega}, \quad \boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} \omega_x & \omega_y & \omega_z \end{bmatrix}^T$$



Für Hauptachsen x,y,z:  $L_{Sx} = J_{Sxx} \omega_x$ ,  $L_{Sy} = J_{Syy} \omega_y$ ,  $L_{Sz} = J_{Szz} \omega_z$

**Starrer Körper mit Festlager O:**

$$\mathbf{L}_O = \mathbf{J}_O \boldsymbol{\omega}$$



**Starrer Körper bei ebener Bewegung**

(z.B. Rotation um raumfeste Achse):

Voraussetzung: Bezugsachsen senkrecht zur Bewegungsebene sind Hauptachsen!

$$\mathbf{L}_S = \mathbf{J}_S \boldsymbol{\omega}$$

Für starren Körper mit Festlager auch:

$$\mathbf{L}_O = \mathbf{J}_O \boldsymbol{\omega}$$

## Impulssatz und Drehimpulssatz (Drallsatz)

### Impulssatz für einen Massenpunkt

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \quad \text{bzw.} \quad m\vec{a} = \vec{F}$$

(für freien Massenpunkt: Newtonsches Grundgesetz)

### Impulssatz für ein beliebiges System

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_a \quad \text{bzw.} \quad m\vec{a}_S = \vec{F}_a \quad \text{2. Schwerpunktsatz}$$

$\vec{F}_a$  - Resultierende aller äußeren Kräfte

## Drehimpulssatz für ein beliebiges System

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_a$$

$\vec{M}_a$  - Resultierendes Moment aller äußeren Kräfte

## Drehimpulssatz für einen starren Körper

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d'\vec{L}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{L} = \vec{M}_a, \quad \mathbf{L} = \mathbf{J} \boldsymbol{\omega}, \quad \frac{d'\vec{L}}{dt} = \dot{L}_x \vec{e}_x + \dot{L}_y \vec{e}_y + \dot{L}_z \vec{e}_z$$

Bezugspunkt für  $\vec{L}$  und  $\vec{M}_a$  einheitlich ein raumfester Punkt O oder der Massenmittelpunkt S.  
Sind x,y,z Hauptachsen, so ergeben sich die

### *Eulerschen Gleichungen*

$$\begin{aligned} J_{xx} \dot{\omega}_x - (J_{yy} - J_{zz}) \omega_y \omega_z &= M_{ax} \\ J_{yy} \dot{\omega}_y - (J_{zz} - J_{xx}) \omega_z \omega_x &= M_{ay} \\ J_{zz} \dot{\omega}_z - (J_{xx} - J_{yy}) \omega_x \omega_y &= M_{az} \end{aligned}$$

### *Starrer Körper bei ebener Bewegung*

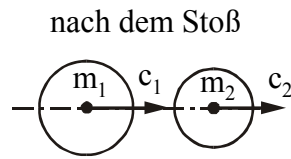
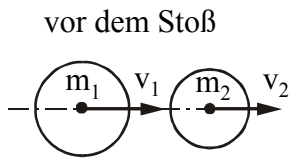
(z.B. Rotation um raumfeste Achse)

$$J \dot{\omega} = M_a$$

Bezugsachse für J und  $M_a$  einheitlich senkrecht zur Bewegungsebene durch raumfesten Punkt O oder Massenmittelpunkt S, nicht notwendig Hauptachse.

# Stoß

## Gerader zentrischer Stoß



Impulserhaltungssatz

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 c_1 + m_2 c_2$$

Stoßzahl

$$k = \frac{c_2 - c_1}{v_1 - v_2}$$

**Allgemeine Lösung:**

$$c_1 = v_1 - \frac{m_2}{m_1 + m_2} (1+k)(v_1 - v_2) = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2 - k m_2 (v_1 - v_2)}{m_1 + m_2}$$

$$c_2 = v_2 + \frac{m_1}{m_1 + m_2} (1+k)(v_1 - v_2) = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2 + k m_1 (v_1 - v_2)}{m_1 + m_2}$$

**Änderung der kinetischen Energie**

$$\Delta T = -\frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (1 - k^2) (v_1 - v_2)^2$$

$|\Delta T|$  = Verlust an kinetischer Energie

**Grenzfälle**

(völlig) unelastischer Stoß =  
plastischer Stoß

(völlig) elastischer Stoß

$$k = 0$$

$$k = 1$$

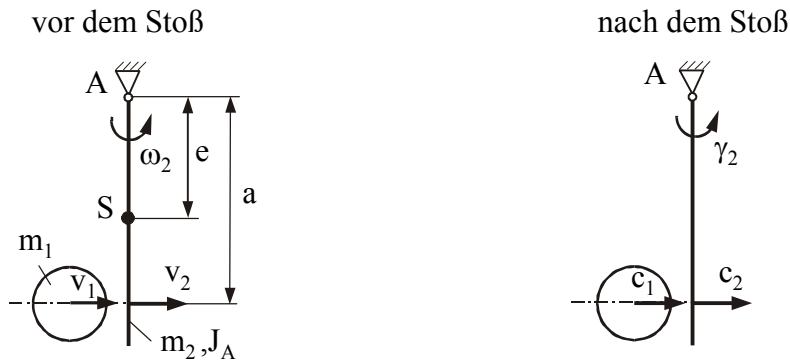
$$\Delta T = \Delta T_{\max} = -\frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2)^2$$

$$\Delta T = 0$$



## Gerader exzentrischer Stoß

Beispiel: Stoß zwischen Kugel und frei drehbar aufgehängtem Stab



Drehimpulserhaltungssatz  
bezüglich A

$$m_1 c_1 a + J_A \gamma_2 = m_1 v_1 a + J_A \omega_2$$

Zwangsbedingung:  $v_2 = a \omega_2$ ,  $c_2 = a \gamma_2$

Stoßzahl

$$k = \frac{c_2 - c_1}{v_1 - v_2}$$

Es gilt die allgemeine Lösung wie beim geraden zentrischen Stoß, wenn nur  $m_2$  durch die reduzierte Masse des Stabes  $m_{2\text{red}} = \frac{J_A}{a^2}$  ersetzt wird,

oder

$$c_1 = \frac{m_1 a^2 v_1 + J_A a \omega_2 - k J_A (v_1 - a \omega_2)}{m_1 a^2 + J_A}$$

$$\gamma_2 = \frac{m_1 a v_1 + J_A \omega_2 + k m_1 a (v_1 - a \omega_2)}{m_1 a^2 + J_A}$$

### Stoßmittelpunkt

Lager A = Stoßmittelpunkt, wenn  $a$  so festgelegt wird, daß bei A während des Stoßes kein Kraftimpuls übertragen wird:

$$a = \frac{J_A}{m_2 e}$$

# Lineare Schwingungen mit einem Freiheitsgrad

## Freie ungedämpfte Schwingungen

Allgemeine Bewegungsgleichung:

$$\ddot{q} + \omega^2 q = 0$$

$q=q(t)$ : verallgemeinerte Bewegungskordinate  
 $\omega^2$ : von Systemparametern abhängiger Ausdruck

Allgemeine Lösung für  $\omega^2 > 0$ :

$$q(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t = A \sin(\omega t + \varphi)$$

mit

$$C_1 = A \sin \varphi, \quad C_2 = A \cos \varphi$$
$$A^2 = C_1^2 + C_2^2, \quad \varphi = \arctan \frac{C_1}{C_2} = \arcsin \frac{C_1}{A}$$

Bestimmung von  $C_1$ ,  $C_2$  bzw.  $A$ ,  $\varphi$  aus Anfangsbedingungen

$\omega$ : Eigenkreisfrequenz

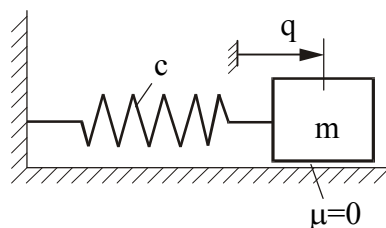
$f = \frac{\omega}{2\pi}$ : Eigenfrequenz

$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f}$ : Periodendauer (Schwingungsdauer)

$\omega t + \varphi$ : Phase(nwinkel)

$\varphi$ : Nullphase(nwinkel)

**Beispiel:** Reibungsfreier horizontaler Feder-Masse-Schwinger  
( $q=0$ : Feder entspannt)



$$m\ddot{q} + cq = 0, \quad \omega = \sqrt{\frac{c}{m}}$$

## Freie viskos gedämpfte Schwingungen

Allgemeine Bewegungsgleichung

$$\ddot{q} + 2\delta\dot{q} + \omega_0^2 q = 0$$

$\delta = D\omega_0$ ,  $\omega_0^2$ : von Systemparametern abhängige Ausdrücke

Allgemeine Lösung für  $\delta < \omega_0$  ( $D < 1$ ):

$$q(t) = e^{-\delta t} (C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t) = e^{-\delta t} A \sin(\omega t + \varphi)$$

mit

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \omega_0 \sqrt{1 - D^2}$$

Bestimmung von  $C_1$ ,  $C_2$  bzw.  $A$ ,  $\varphi$  aus Anfangsbedingungen

- $\omega_0$  :            Kennkreisfrequenz  
 $\omega$  :             Eigenkreisfrequenz  
 $\delta$  :             Abklingkonstante,  $[\delta] = \text{s}^{-1}$   
 $D = \frac{\delta}{\omega_0}$  :       Dämpfungsgrad (dimensionslos)

Logarithmisches Dekrement

$$\Lambda = \ln \frac{q(t_0)}{q(t_0 + T)} = \frac{1}{N} \ln \frac{q(t_0)}{q(t_0 + NT)}, \quad N = 1, 2, \dots \quad T = \frac{2\pi}{\omega}$$

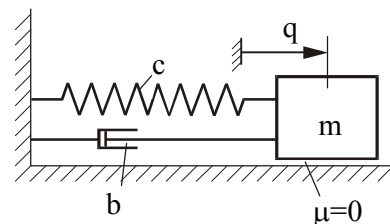
$$\Lambda = \delta T = 2\pi \frac{D}{\sqrt{1 - D^2}}, \quad D = \frac{\Lambda}{\sqrt{(2\pi)^2 + \Lambda^2}}$$

**Beispiel:** Reibungsfreier horizontaler Feder-Dämpfer-Masse-Schwinger  
 ( $q = 0$ : Feder entspannt)

$$m\ddot{q} + b\dot{q} + cq = 0$$

$b$  - Dämpfungskonstante  
 $[b] = \text{Ns m}^{-1} = \text{kg s}^{-1}$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}}, \quad \delta = \frac{b}{2m}, \quad D = \frac{b}{2\sqrt{cm}}$$



## Erzwungene viskos gedämpfte Schwingungen

Beispiel: Reibungsfreier horizontaler Feder-Dämpfer-Masse-Schwinger

Allgemeine Bewegungsgleichung:

$$m\ddot{q} + b\dot{q} + cq = F(\Omega, t), \quad \delta = \frac{b}{2m}, \quad \omega_0^2 = \frac{c}{m}$$

Vollständige allgemeine Lösung:

$$q(t) = e^{-\delta t} A \sin(\omega t + \varphi) + K \sin(\Omega t - \psi)$$

Eingeschwungene stationäre Lösung:

$$q(t) = K \sin(\Omega t - \psi)$$

$F(\Omega t)$ : harmonisch veränderliche Erregerkraft

$\Omega$ : Erregerkreisfrequenz

$K$ : Amplitude der  $\Omega$ -frequenten stationären Lösung

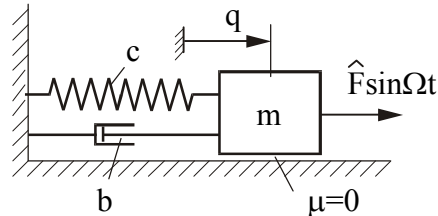
$\psi$ : Nacheilwinkel

$\eta = \frac{\Omega}{\omega_0}$ : Abstimmung(sverhältnis)

### Kraft- oder Federkrafterregung

$$F(\Omega, t) = \hat{F} \sin \Omega t,$$

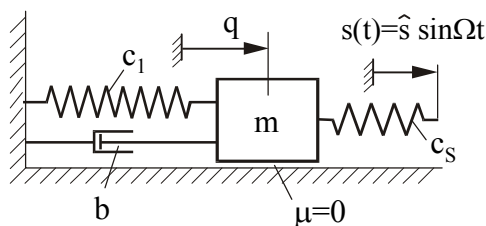
$$K = \frac{\hat{F}}{c} V_1$$



$$F(\Omega, t) = c_s \hat{s} \sin \Omega t,$$

$$K = \frac{c_s}{c} \hat{s} V_1,$$

$$c = c_1 + c_s$$



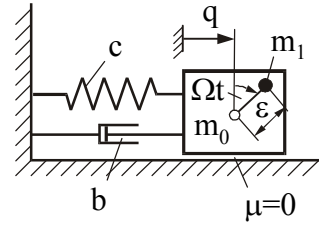
Vergrößerungsfunktion: 
$$V_1 = \frac{1}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + 4D^2\eta^2}}$$

Nacheilwinkel: 
$$\psi = \psi_1 = \arctan \frac{2D\eta}{1 - \eta^2}, \quad 0 \leq \psi_1 < \pi$$

### Unwuchterregung

$$F(\Omega, t) = m_1 \varepsilon \Omega^2 \sin \Omega t,$$

$$K = \frac{m_1}{m} \varepsilon V_2, \quad m = m_0 + m_1$$



Vergrößerungsfunktion: 
$$V_2 = \frac{\eta^2}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + 4D^2\eta^2}}$$

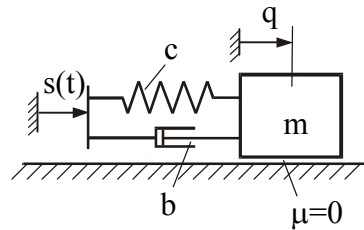
Nacheilwinkel: 
$$\psi = \psi_2 = \arctan \frac{2D\eta}{1 - \eta^2}, \quad 0 \leq \psi_2 < \pi$$

### Stützerregung

$$F(\Omega, t) = cs + b\dot{s},$$

$$s(t) = \hat{s} \sin \Omega t$$

$$K = \hat{s} V_3$$



Vergrößerungsfunktion: 
$$V_3 = \frac{\sqrt{1 + 4D^2\eta^2}}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + 4D^2\eta^2}}$$

Nacheilwinkel: 
$$\psi = \psi_3 = \arctan \frac{2D\eta^3}{1 - \eta^2(1 - 4D^2)}, \quad 0 \leq \psi_3 < \pi$$