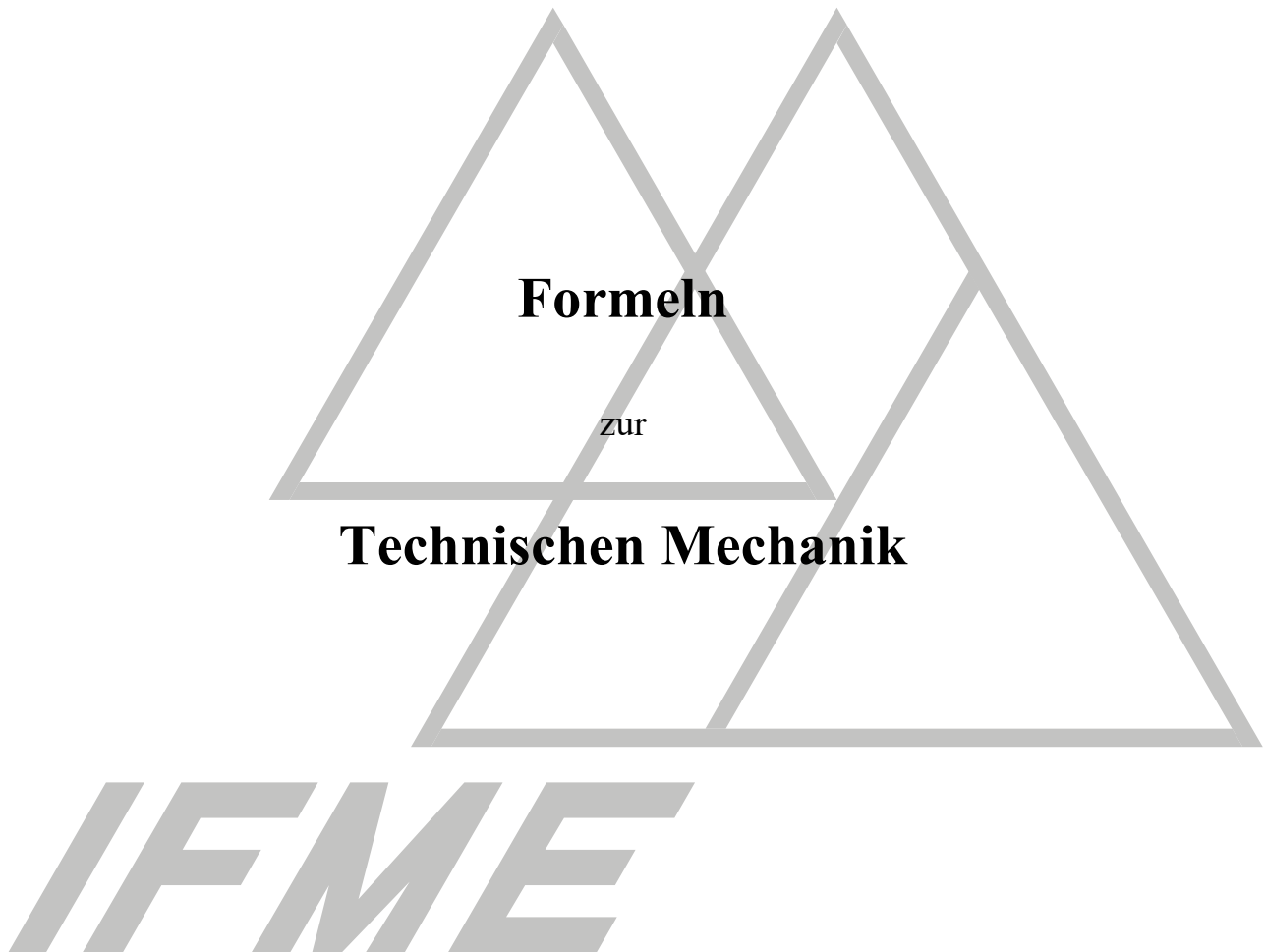


Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg

Institut für Mechanik



Inhalt:

Seite

Statik starrer Körper

3

Festigkeitslehre

11

Kinematik und Kinetik

26

Ausgabe 2016

Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg

Institut für Mechanik

Formeln

zur

Technischen Mechanik

Inhalt:	Seite
Statik starrer Körper	3
Festigkeitslehre	11
Kinematik und Kinetik	26

Ausgabe 2016

Copyright / Urheberrechtsbelehrung

© IFME 2016, Institut für Mechanik, Otto-von-Guericke Universität Magdeburg

Sämtliche Texte, Bilder und andere veröffentlichten Informationen unterliegen - sofern nicht anders gekennzeichnet - dem Copyright des IFME oder werden mit Erlaubnis der Rechteinhaber veröffentlicht.

Jede Verlinkung, Vervielfältigung, Verbreitung, Erfassung in optischen oder elektronischen Medien, Sendung und Wieder- bzw. Weitergabe der Inhalte ist ohne schriftliche Genehmigung des IFME ausdrücklich untersagt.

Warenzeichen: Alle Warenzeichen sind Warenzeichen der jeweiligen Eigentümer.

Statik starrer Körper

Darstellung von Kräften und Momenten:

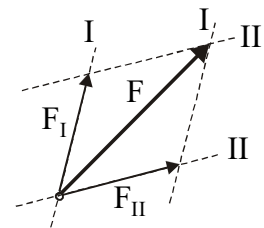
- der Vektorcharakter von Kräften und Momenten wird durch einen Pfeil über dem Formelzeichen gekennzeichnet (z.B. \vec{F} bzw. \vec{M})
- Beträge von Vektoren werden durch Normaldruck dargestellt (z.B. $|\vec{F}| \equiv F$)

Zentrales ebenes Kraftsystem

Äquivalenz

- Zerlegung einer Kraft in zwei beliebige Richtungen I und II

$$\text{Kräfteparallelogramm: } \vec{F} = \vec{F}_I + \vec{F}_{II}$$



- Zerlegung einer Kraft in zwei senkrechte Komponenten (Komponentendarstellung)

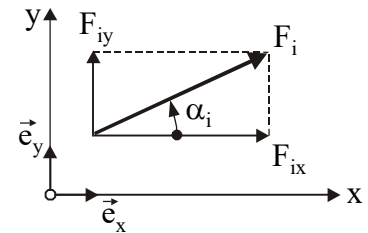
$\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ – Einheitsvektoren,

$$|\vec{e}_x| = 1, \quad |\vec{e}_y| = 1, \quad |\vec{e}_z| = 1$$

$$\vec{F}_i = F_{ix} \vec{e}_x + F_{iy} \vec{e}_y$$

$$F_{ix} = F_i \cos \alpha_i$$

$$F_{iy} = F_i \sin \alpha_i$$



- Zusammensetzung von Kräften

Resultierende Kraft:

$$\vec{F}_R = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = F_{Rx} \vec{e}_x + F_{Ry} \vec{e}_y$$

$$F_{Rx} = \sum_{i=1}^n F_{ix}, \quad F_{Ry} = \sum_{i=1}^n F_{iy}$$

Betrag der Resultierenden:

$$F_R = \sqrt{F_{Rx}^2 + F_{Ry}^2}$$

Richtung der Resultierenden:

$$\tan \alpha_R = \frac{F_{Ry}}{F_{Rx}}$$

Gleichgewicht

Gleichgewichtsbedingung:

$$\vec{F}_R = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = 0$$

in Komponentenschreibweise:

$$F_{Rx} = \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0, \quad F_{Ry} = \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0$$

symbolisch:

→ :

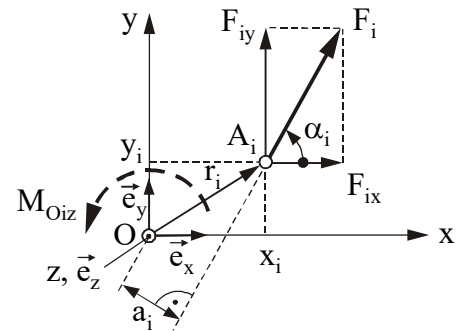
↑ :

Allgemeines ebenes Kraftsystem

Moment einer Kraft bezüglich des Punktes O:

Momentenvektor: $\vec{M}_{O_i} = \vec{r}_i \times \vec{F}_i$

$$\vec{M}_{O_i} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ x_i & y_i & 0 \\ F_{ix} & F_{iy} & 0 \end{vmatrix} = M_{O_{iz}} \vec{e}_z$$



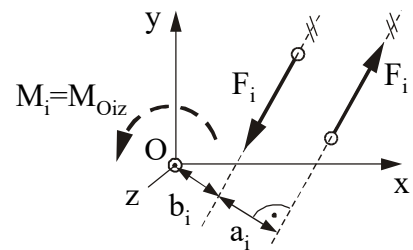
Betrag: $M_{O_i} = M_{O_{iz}} = x_i F_{iy} - y_i F_{ix}$
 oder $M_{O_i} = M_{O_{iz}} = a_i F_i$

Drehsinn:

Sonderfall: Moment eines Kräftepaars

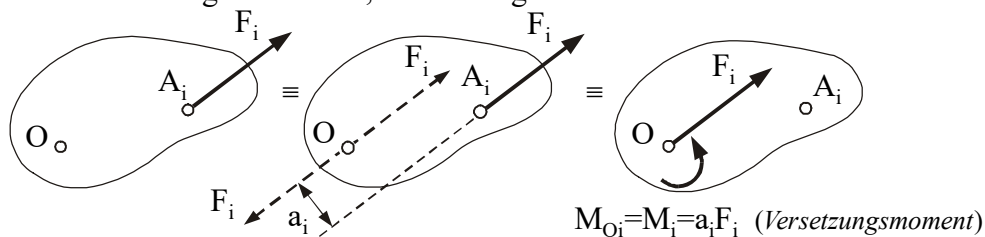
$$M_i = (b_i + a_i) F_i - b_i F_i = a_i F_i$$

(→ unabhängig vom Bezugspunkt)

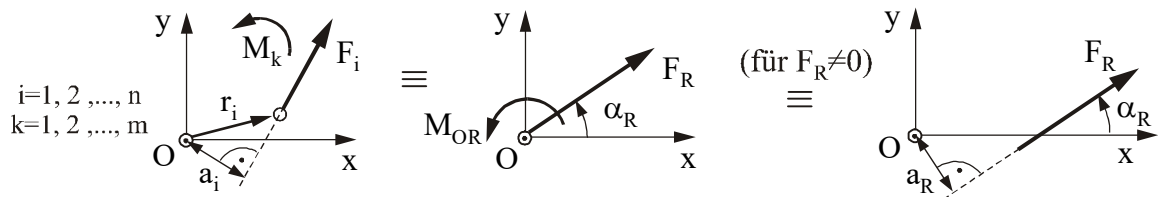


Äquivalenz

- Parallelverschiebung einer Kraft, Versetzungsmoment



- Zusammensetzung von Kräften und Momenten:



Resultierende Kraft $\vec{F}_R = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$ (vgl. zentrales ebenes Kraftsystem)

Resultierendes Moment $\vec{M}_{OR} = \sum_{i=1}^n \vec{M}_{O_i} + \sum_{k=1}^m \vec{M}_k = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_i + \sum_{k=1}^m \vec{M}_k$

bzw. $M_{OR} = \sum_{i=1}^n M_{O_i} + \sum_{k=1}^m M_k = \sum_{i=1}^n a_i \cdot F_i + \sum_{k=1}^m M_k$

Lage der resultierenden Kraft $a_R \cdot F_R = M_{OR}$ (Voraussetzung: $F_R \neq 0$)

Gleichgewicht

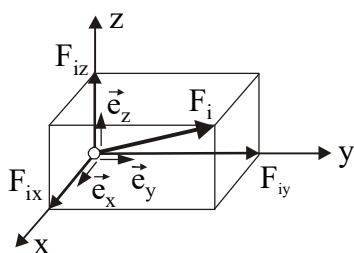
Gleichgewichtsbedingungen: $\vec{F}_R = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = 0$, $\vec{M}_{OR} = \sum_{i=1}^n \vec{M}_{O_i} + \sum_{k=1}^m \vec{M}_k = 0$

in Komponentenschreibweise: $F_{Rx} = \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0$, $F_{Ry} = \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0$, $M_{OR} = \sum_{i=1}^n M_{O_i} + \sum_{k=1}^m M_k = 0$

symbolisch: \longrightarrow : \uparrow : \curvearrowright :

Zentrales räumliches Kraftsystem

Äquivalenz



$$\vec{F}_R = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = F_{Rx} \vec{e}_x + F_{Ry} \vec{e}_y + F_{Rz} \vec{e}_z$$

$$F_{Rx} = \sum_{i=1}^n F_{ix}, \quad F_{Ry} = \sum_{i=1}^n F_{iy}, \quad F_{Rz} = \sum_{i=1}^n F_{iz}$$

$$F_R = \sqrt{F_{Rx}^2 + F_{Ry}^2 + F_{Rz}^2}$$

Gleichgewicht

Gleichgewichtsbedingungen: $\vec{F}_R = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = 0$

in Komponentenschreibweise: $F_{Rx} = \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0$, $F_{Ry} = \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0$, $F_{Rz} = \sum_{i=1}^n F_{iz} = 0$

symbolisch: \swarrow x : \longrightarrow y : \uparrow z :

Allgemeines räumliches Kraftsystem

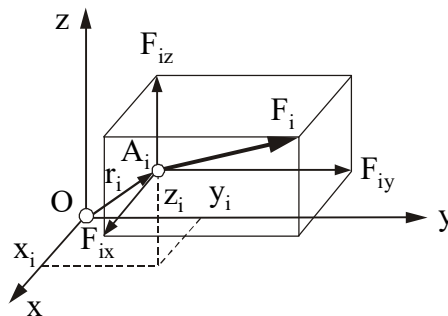
Moment einer Kraft bezüglich des Punktes O

$$\vec{M}_{O_i} = \vec{r}_i \times \vec{F}_i$$

$$\vec{M}_{O_i} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ x_i & y_i & z_i \\ F_{ix} & F_{iy} & F_{iz} \end{vmatrix}$$

$$\vec{M}_{O_i} = M_{O_{ix}} \vec{e}_x + M_{O_{iy}} \vec{e}_y + M_{O_{iz}} \vec{e}_z$$

$$M_{O_{ix}} = y_i F_{iz} - z_i F_{iy}, \quad M_{O_{iy}} = z_i F_{ix} - x_i F_{iz}, \quad M_{O_{iz}} = x_i F_{iy} - y_i F_{ix}$$



Gleichgewicht

$$\text{Gleichgewichtsbedingungen: } \vec{F}_R = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = 0, \quad \vec{M}_{OR} = \sum_{i=1}^n \vec{M}_{O_i} = 0$$

in Komponentenschreibweise:

$$\begin{aligned} F_{Rx} &= \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0, & F_{Ry} &= \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0, & F_{Rz} &= \sum_{i=1}^n F_{iz} = 0 \\ M_{ORx} &= \sum_{i=1}^n M_{O_{ix}} = 0, & M_{ORy} &= \sum_{i=1}^n M_{O_{iy}} = 0, & M_{ORz} &= \sum_{i=1}^n M_{O_{iz}} = 0 \end{aligned}$$

symbolisch:

$$\begin{array}{ccc} \swarrow x : & \longrightarrow y : & \uparrow z : \\ \swarrow O x : & \longrightarrow O y : & \uparrow O z : \end{array}$$

Schwerpunkt

Körper im homogenen Schwerfeld

Schwerpunkt = Massenmittelpunkt:

$$x_S = \frac{\int x \, dm}{m}, \quad y_S = \frac{\int y \, dm}{m}, \quad z_S = \frac{\int z \, dm}{m}, \quad m = \int dm$$

Sonderfall: Dichte $\rho = \text{konst.}$ (Volumenmittelpunkt)

$$x_S = \frac{\int x \, dV}{V}, \quad y_S = \frac{\int y \, dV}{V}, \quad z_S = \frac{\int z \, dV}{V}, \quad V = \int dV$$

Ebene Flächen

$$x_S = \frac{\int x \, dA}{A}, \quad y_S = \frac{\int y \, dA}{A}, \quad A = \int dA$$

Ebene Linien

$$x_S = \frac{\int x \, dl}{l}, \quad y_S = \frac{\int y \, dl}{l}, \quad l = \int dl$$

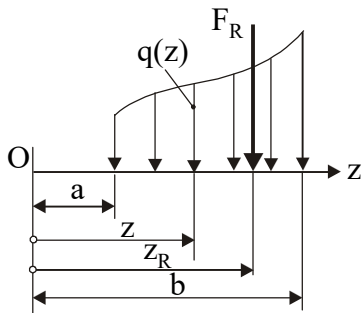
Zusammengesetzte Flächen

Voraussetzung: Für die Teilflächen A_i sind die Schwerpunktskoordinaten x_{Si} , y_{Si} bekannt.

$$x_S = \frac{1}{A} \sum_i x_{Si} A_i, \quad y_S = \frac{1}{A} \sum_i y_{Si} A_i, \quad A = \sum_i A_i$$

Streckenlasten

Ermittlung der Resultierenden

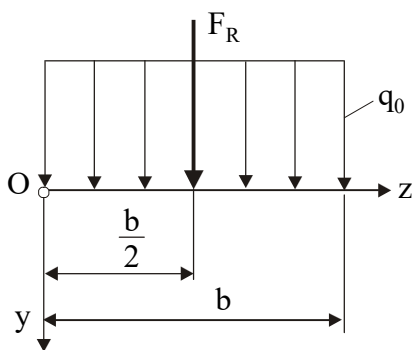


Größe der Resultierenden: $F_R = \int_a^b q(z) dz$

Lage der Resultierenden: $z_R = \frac{1}{F_R} \int_a^b q(z) z dz$

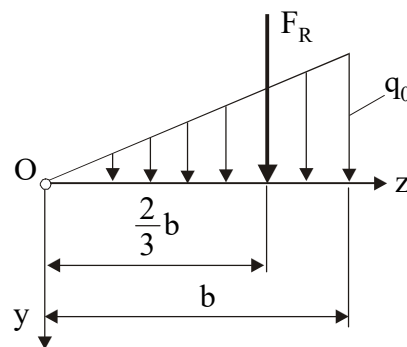
Beispiele

Rechtecklast



$$F_R = q_0 b, \quad z_R = \frac{1}{2} b$$

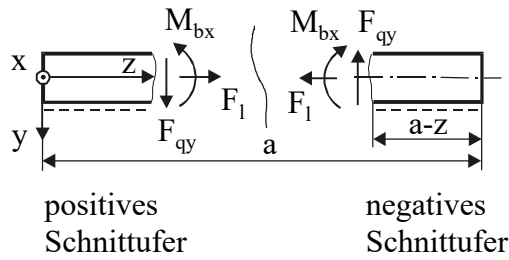
Dreiecklast



$$F_R = \frac{1}{2} q_0 b, \quad z_R = \frac{2}{3} b$$

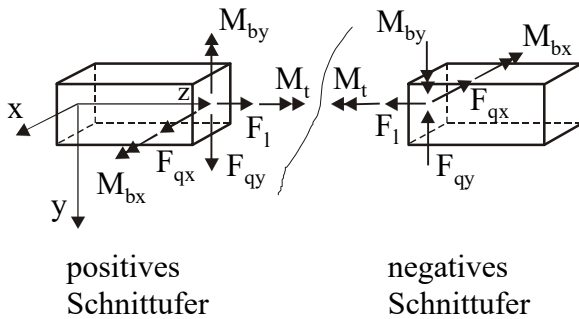
Schnittgrößen

- eben



F_1 – Längskraft
 F_{qy} – Querkraft
 M_{bx} – Biegemoment

- räumlich



F_1 – Längskraft
 F_{qx}, F_{qy} – Querkräfte
 M_t – Torsionsmoment
 M_{bx}, M_{by} – Biegemomente

Differentielle Beziehungen

Positive Streckenlasten haben die Richtung der positiven Achsen!

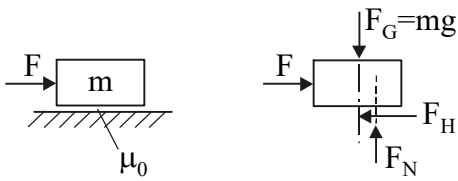
$$\frac{dF_1}{dz} = -q_z(z)$$

$$\frac{dF_{qy}}{dz} = -q_y(z), \quad \frac{dF_{qx}}{dz} = -q_x(z)$$

$$\frac{dM_{bx}}{dz} = F_{qy}(z), \quad \frac{dM_{by}}{dz} = F_{qx}(z)$$

Haftung und Gleitreibung

Haftung



Bedingung für Haftung:

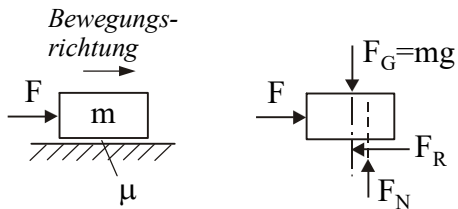
$$|F_H| \leq F_{H \max} = \mu_0 F_N \quad \text{für } F_N > 0$$

F_H – Haftungskraft (Reaktionskraft; hier $F_H = F$)

F_N – resultierende Normalkraft an der Kontaktfläche (Reaktionskraft; hier $F_N = F_G$)

μ_0 – Haftungskoeffizient

Gleitreibung



Annahme: $F > F_R$ (Bewegung nach rechts!)

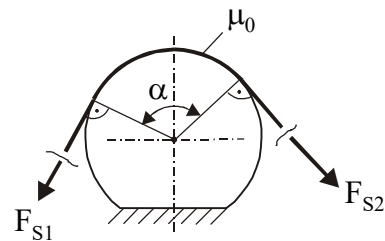
$$F_R = \mu F_N \quad (\text{Coulombsches Gesetz}) \quad \text{für } F_N > 0$$

F_R – Gleitreibungskraft (eingeprägte Kraft; entgegen der Bewegungsrichtung)

F_N – resultierende Normalkraft an der Kontaktfläche (Reaktionskraft; hier $F_N = F_G$)

μ – Gleitreibungskoeffizient ($\mu < \mu_0$)

Seilhaftung

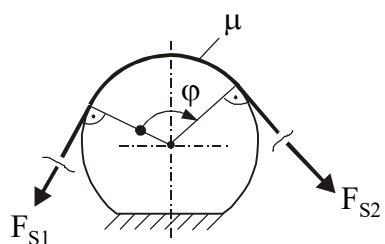


Bedingung:

$$F_{S1} e^{-\mu_0 \alpha} \leq F_{S2} \leq F_{S1} e^{\mu_0 \alpha}$$

α – Umschlingungswinkel

Seilreibung

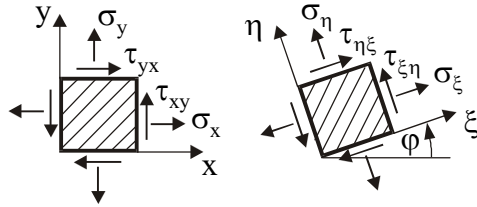


$$F_{S2} = F_{S1} e^{\mu \varphi}$$

φ – Umschlingungswinkel, wobei Richtungssinn von φ = Richtung der Seilbewegung ist.

Festigkeitslehre

Ebener Spannungszustand



Gleichheit der zugeordneten Schubspannungen:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{\xi\eta} = \tau_{\eta\xi}$$

Spannungen im gedrehten Koordinatensystem:

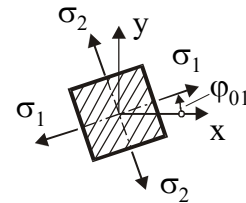
$$\begin{aligned} \sigma_{\xi} &= \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\cos 2\varphi + \tau_{xy}\sin 2\varphi \\ \sigma_{\eta} &= \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) - \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\cos 2\varphi - \tau_{xy}\sin 2\varphi \\ \tau_{\xi\eta} &= -\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\sin 2\varphi + \tau_{xy}\cos 2\varphi \end{aligned}$$

Invarianz der Summe der Normalspannungen:

$$\sigma_x + \sigma_y = \sigma_{\xi} + \sigma_{\eta}$$

Hauptnormalspannungen:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \sqrt{\frac{1}{4}(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \tau_{xy}^2} \\ \sigma_2 &= \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) - \sqrt{\frac{1}{4}(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \tau_{xy}^2} \end{aligned}$$



Richtung der Hauptnormalspannungen:

$$\tan\varphi_{01} = \frac{\sigma_1 - \sigma_x}{\tau_{xy}} = \frac{\sigma_y - \sigma_2}{\tau_{xy}}, \quad \varphi_{02} = \varphi_{01} + \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Für } \varphi = \varphi_{01} \text{ gilt: } \sigma_{\xi} = \sigma_1, \quad \sigma_{\eta} = \sigma_2, \quad \tau_{\xi\eta} = 0$$

Hauptschubspannungen:

$$\tau_{\max 1,2} = \tau_{\xi\eta}(\varphi_{01} \pm \frac{\pi}{4}) = \mp \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)$$

Verschiebungen und Verzerrungen

Verschiebungen: u, v, w in den Koordinatenrichtungen x, y, z

Verzerrungen:

- **Dehnungen:** $\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$
- **Gleitungen:** $\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}$

Verallgemeinertes Hookesches Gesetz

(Beliebiger räumlicher Spannungszustand bei Berücksichtigung der Dehnung infolge einer Temperaturänderung ΔT)

- **Dehnungen:**
$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] + \alpha \Delta T$$
$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)] + \alpha \Delta T$$
$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] + \alpha \Delta T$$

α – Wärmeausdehnungskoeffizient
- **Gleitungen:** $\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}, \quad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}, \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)}$

Elastische Konstanten: E – Elastizitätsmodul
 ν – Querkontraktionszahl
 G – Gleitmodul

Gleichungen für die Normalspannungen infolge der Dehnungen:

$$\sigma_x = \frac{E}{1+\nu} \left[\varepsilon_x + \frac{\nu}{1-2\nu} e \right] - \frac{E}{1-2\nu} \alpha \Delta T$$
$$\sigma_y = \frac{E}{1+\nu} \left[\varepsilon_y + \frac{\nu}{1-2\nu} e \right] - \frac{E}{1-2\nu} \alpha \Delta T$$
$$\sigma_z = \frac{E}{1+\nu} \left[\varepsilon_z + \frac{\nu}{1-2\nu} e \right] - \frac{E}{1-2\nu} \alpha \Delta T$$

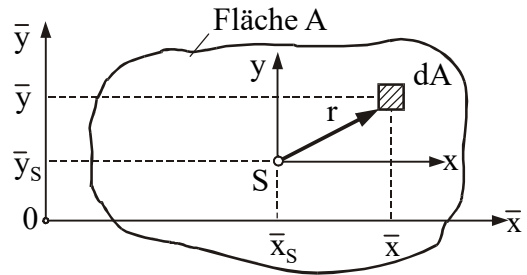
mit der Volumendehnung: $e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$

Flächenmomente 2. Ordnung

(Flächenträgheitsmomente)

Axiale Flächenmomente 2. Ordnung:

$$I_{xx} = \int_{(A)} y^2 dA, \quad I_{yy} = \int_{(A)} x^2 dA$$



Zentrifugalmoment (Deviationsmoment):

$$I_{xy} = - \int_{(A)} x y dA$$

Polares Flächenmoment 2. Ordnung:

$$I_p = \int_{(A)} r^2 dA = \int_{(A)} (x^2 + y^2) dA = I_{xx} + I_{yy}$$

Steinerscher Satz:

(Ursprung des Koordinatensystems x, y ist der Schwerpunkt S)

$$I_{\bar{x}\bar{x}} = I_{xx} + \bar{y}_S^2 A, \quad I_{\bar{y}\bar{y}} = I_{yy} + \bar{x}_S^2 A, \quad I_{\bar{x}\bar{y}} = I_{xy} - \bar{x}_S \bar{y}_S A$$

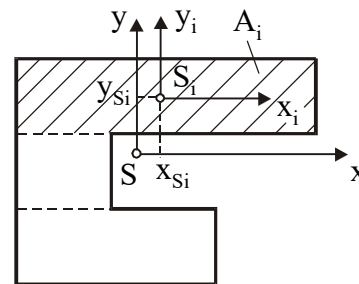
Flächenmomente für zusammengesetzte Flächen:

(n Teilflächen)

$$I_{xx} = \sum_{i=1}^n (I_{x_i x_i} + y_{S_i}^2 A_i)$$

$$I_{yy} = \sum_{i=1}^n (I_{y_i y_i} + x_{S_i}^2 A_i)$$

$$I_{xy} = \sum_{i=1}^n (I_{x_i y_i} - x_{S_i} y_{S_i} A_i)$$

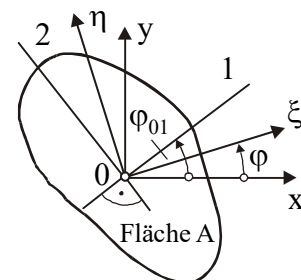


Flächenmomente bezüglich eines gedrehten Koordinatensystems:

$$I_{\xi\xi} = \frac{1}{2}(I_{xx} + I_{yy}) + \frac{1}{2}(I_{xx} - I_{yy}) \cos 2\varphi + I_{xy} \sin 2\varphi$$

$$I_{\eta\eta} = \frac{1}{2}(I_{xx} + I_{yy}) - \frac{1}{2}(I_{xx} - I_{yy}) \cos 2\varphi - I_{xy} \sin 2\varphi$$

$$I_{\xi\eta} = -\frac{1}{2}(I_{xx} - I_{yy}) \sin 2\varphi + I_{xy} \cos 2\varphi$$



Hauptflächenmomente:

$$I_1 = I_{\max} = \frac{1}{2}(I_{xx} + I_{yy}) + \sqrt{\frac{1}{4}(I_{xx} - I_{yy})^2 + I_{xy}^2}$$

$$I_2 = I_{\min} = \frac{1}{2}(I_{xx} + I_{yy}) - \sqrt{\frac{1}{4}(I_{xx} - I_{yy})^2 + I_{xy}^2}$$

Richtung der Hauptachsen:

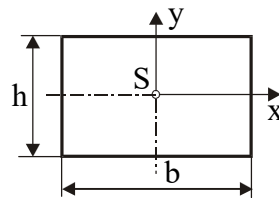
$$\tan\varphi_{01} = \frac{I_1 - I_{xx}}{I_{xy}} = \frac{I_{yy} - I_2}{I_{xy}}, \quad \varphi_{02} = \varphi_{01} + \frac{\pi}{2}$$

Für $\varphi = \varphi_{01}$ gilt: $I_{\xi\xi} = I_1, \quad I_{\eta\eta} = I_2, \quad I_{\xi\eta} = 0$

Flächenmomente einfacher Flächen:

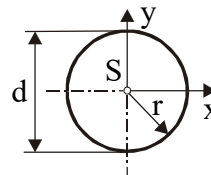
Rechteck:

$$I_{xx} = \frac{bh^3}{12}, \quad I_{yy} = \frac{hb^3}{12}, \quad I_{xy} = 0$$



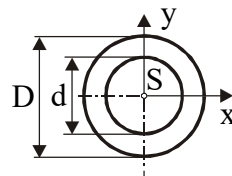
Kreis:

$$I_{xx} = I_{yy} = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi r^4}{4}, \quad I_{xy} = 0$$



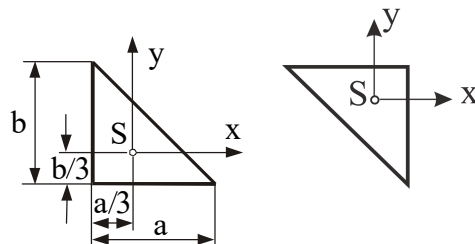
Kreisring:

$$I_{xx} = I_{yy} = \frac{\pi}{64}(D^4 - d^4), \quad I_{xy} = 0$$

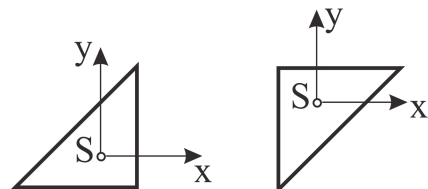


Rechtwinkliges Dreieck:

$$I_{xx} = \frac{ab^3}{36}, \quad I_{yy} = \frac{ba^3}{36}, \quad I_{xy} = \frac{a^2b^2}{72}$$



$$I_{xx} = \frac{ab^3}{36}, \quad I_{yy} = \frac{ba^3}{36}, \quad I_{xy} = -\frac{a^2b^2}{72}$$



Zug und Druck

Normalspannung: $\sigma(z) = \frac{F_1(z)}{A(z)}$

$F_1(z)$ - Längskraft
 $A(z)$ - Querschnittsfläche

Dehnung/Verschiebung: $\varepsilon(z) = \frac{dw(z)}{dz} = \frac{\sigma(z)}{E} + \alpha \Delta T = \frac{F_1(z)}{EA(z)} + \alpha \Delta T$

$$w(z) = \int \left(\frac{F_1(z)}{EA(z)} + \alpha \Delta T \right) dz + C$$

$EA(z)$ - Dehnsteifigkeit
 $w(z)$ - Verschiebung in z-Richtung

Verlängerung eines Stabes der Länge l:

$$\Delta l = \int_0^l \varepsilon(z) dz$$

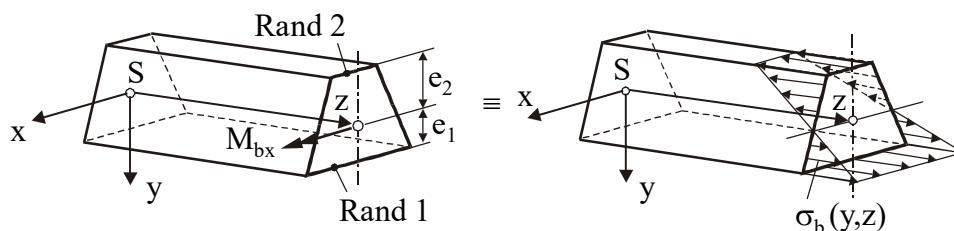
Sonderfall $F_1 = \text{konst.}, A = \text{konst.}, \varepsilon = \text{konst.}, \Delta T = 0$:

$$\Delta l = \varepsilon l = \frac{F_1 l}{EA}$$

Biegung

Die Koordinatenachsen x, y sind Hauptzentralachsen!

Normalspannungen bei gerader Biegung



$$\sigma(y, z) = \frac{M_{bx}(z)}{I_{xx}} y$$

Randfaserspannungen:

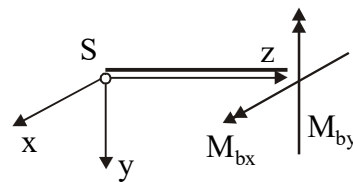
$$\text{Rand 1: } \sigma_{R1}(z) = \frac{M_{bx}(z)}{I_{xx}} e_1, \quad |\sigma_{R1}(z)| = \frac{|M_{bx}(z)|}{W_{b1}}, \quad W_{b1} = \frac{I_{xx}}{e_1}$$

$$\text{Rand 2: } \sigma_{R2}(z) = -\frac{M_{bx}(z)}{I_{xx}} e_2, \quad |\sigma_{R2}(z)| = \frac{|M_{bx}(z)|}{W_{b2}}, \quad W_{b2} = \frac{I_{xx}}{e_2}$$

W_{b1}, W_{b2} – (Biege-)Widerstandsmomente

Normalspannungen bei schiefer Biegung

$$\sigma(x, y, z) = \frac{M_{bx}(z)}{I_{xx}} y + \frac{M_{by}(z)}{I_{yy}} x$$



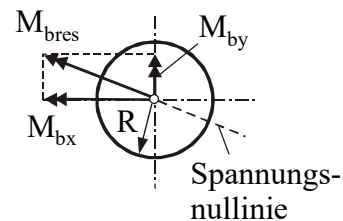
Spannungsnulllinie:

$$y = -\frac{I_{xx}}{I_{yy}} \frac{M_{by}}{M_{bx}} x$$

Randfaserspannungen bei kreisförmigem Querschnitt ($I_{xx} = I_{yy}$):

$$|\sigma_R| = \frac{M_{bres}}{W_b} \quad \text{mit} \quad W_b = \frac{I_{xx}}{R}$$

$$M_{bres} = \sqrt{M_{bx}^2 + M_{by}^2}$$



Verformung bei gerader Biegung

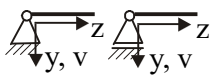
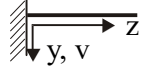
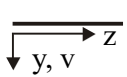
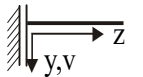
Differentialgleichung der Biegelinie 2. Ordnung:

$$EI_{xx} v''(z) = -M_{bx}(z) \quad EI_{xx} \text{ - Biegesteifigkeit}$$

Differentialgleichung der Biegelinie 4. Ordnung:

$$(EI_{xx} v''(z))'' = q_y(z), \quad \text{wegen} \quad F_{qy} = \frac{dM_{bx}}{dz}, \quad q_y = -\frac{dF_{qy}}{dz}$$

Randbedingungen:

Lagerungsart	Geometrische Randbedingungen	Dynamische Randbedingungen
	$v(z=0) = 0$	$M_{bx}(z=0) = 0$
	$v(z=0) = 0$ $v'(z=0) = 0$	
freier Rand 		$M_{bx}(z=0) = 0$ $F_{qy}(z=0) = 0$
	$v'(z=0) = 0$	$F_{qy}(z=0) = 0$

Torsion

de Saint Venantsche Torsion:

Voraussetzungen:

- Beanspruchung nur durch $M_t = \text{konst.}$, Querschnitt konst.
- keine Behinderung der Querschnittsverwölbung
- Querschnittsform bleibt erhalten

Maximale Schubspannung: $\tau_{\max} = \frac{M_t}{W_t}$

M_t - Torsionsmoment

W_t - Torsionswiderstandsmoment (s. unten)

Drillung/Verdrehwinkel: $\vartheta = \frac{d\varphi}{dz} = \frac{M_t}{GI_t}$

$$\varphi(z) = \int \frac{M_t}{GI_t} dz + c = \frac{M_t}{GI_t} z + c$$

ϑ - Drillung

$\varphi(z)$ - Verdrehwinkel

I_t - Torsionsflächenmoment, s. unten

GI_t - Torsionssteifigkeit

Relativer Verdrehwinkel eines Torsionsstabes der Länge l:

$$\Delta\varphi = \varphi(z=1) - \varphi(z=0) = \frac{M_t l}{GI_t}$$

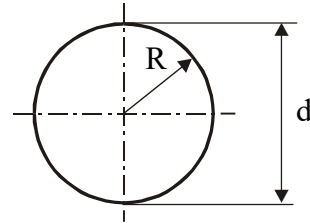
Torsionsflächenmomente und Torsionswiderstandsmomente verschiedener Querschnittsformen:

Kreis- und Kreisringquerschnitt

($M_t = \text{konst.}$ nicht notwendig, Querschnitt bleibt eben)

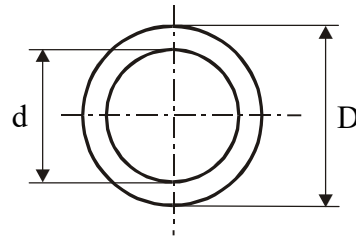
$$I_t = I_p = \frac{\pi R^4}{2} = \frac{\pi d^4}{32}$$

$$W_t = \frac{I_p}{R} = \frac{\pi R^3}{2} = \frac{\pi d^3}{16}$$



$$I_t = I_p = \frac{\pi}{32} (D^4 - d^4)$$

$$W_t = \frac{I_p}{\frac{D}{2}} = \frac{\pi}{16} \frac{D^4 - d^4}{D}$$



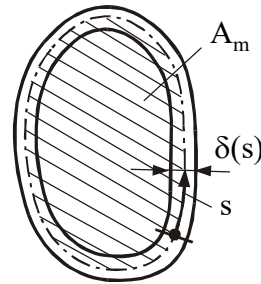
(I_p – Polares Flächenmoment)

Dünnwandige geschlossene Querschnitte

$$I_t = \frac{4A_m^2}{\oint \frac{ds}{\delta(s)}} \quad (2. \text{ Bredtsche Formel})$$

$$W_t = 2 A_m \delta_{\min}$$

$$\tau(s) = \frac{M_t}{2A_m \delta(s)} \quad (1. \text{ Bredtsche Formel})$$

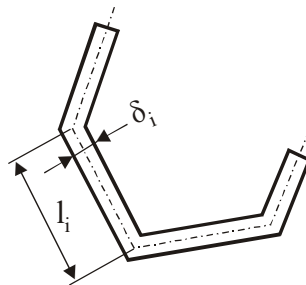


Dünnwandige offene Querschnitte

(Dicke abschnittsweise konstant)

$$I_t = \frac{1}{3} \sum l_i \delta_i^3$$

$$W_t = \frac{I_t}{\delta_{\max}}$$



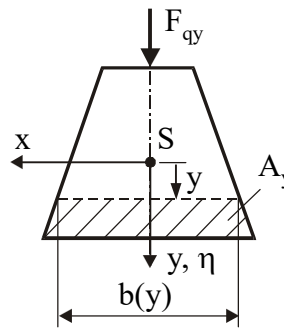
Schubbeanspruchung durch Querkräfte

Vollquerschnitte

Vertikale Schubspannung:

$$\tau_v(y,z) = \frac{F_{qy}(z) S_x(y)}{I_{xx} b(y)}$$

$$S_x(y) = \int_{(A_y)} \eta dA$$



Rechteckquerschnitt (Breite b, Höhe h):

$$\tau(y,z) = \tau_v(y,z) = \frac{3}{2} \left[1 - 4 \left(\frac{y}{h} \right)^2 \right] \tau_m$$

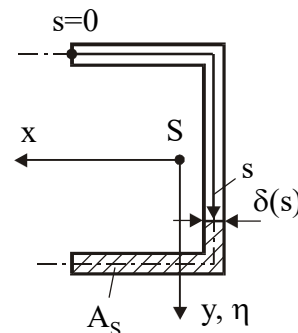
Mittlere Schubspannung: $\tau_m = \frac{F_q(z)}{bh}$

Dünnwandige offene Profile (x,y-Hauptachsen):

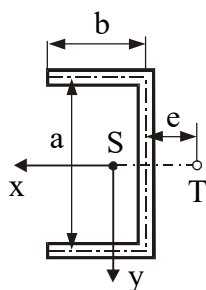
$$\tau(s,z) = \frac{F_{qy}(z) S_x(s)}{I_{xx} \delta(s)}$$

mit $S_x(s) = \int_{(A_s)} \eta dA$

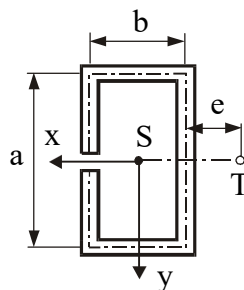
Schubfluß: $t(s,z) = \tau(s,z) \delta(s) = \frac{F_{qy}(z) S_x(s)}{I_{xx}}$



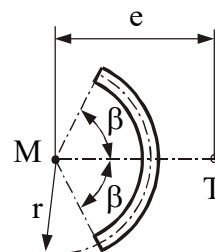
Schubmittelpunkt für ausgewählte Querschnitte:



$$e = \frac{3b^2}{a + 6b}$$



$$e = \frac{b(2a + 3b)}{2a + 6b}$$



$$e = \frac{2r(\sin \beta - \beta \cos \beta)}{\beta - \sin \beta \cos \beta}$$

Zusammengesetzte Beanspruchungen

Gesamtnormalspannung:

$$\sigma = \frac{F_l}{A} + \frac{M_{bx}}{I_{xx}} y + \frac{M_{by}}{I_{yy}} x$$

x, y - Hauptzentralachsen

betragsgrößte Normalspannung bei Kreis- und Kreisringquerschnitten (vgl. auch Seite 14):

$$|\sigma|_{\max} = \frac{|F_l|}{A} + \frac{M_{\text{bres}}}{W_b}$$

Vergleichsspannungen:

Hauptspannungshypothese $\sigma_{V1} = \sigma_1$

Hauptdehnungshypothese $\sigma_{V2} = \sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)$

Schubspannungshypothese $\sigma_{V3} = \sigma_1 - \sigma_3$

Gestaltänderungshypothese $\sigma_{V4} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]}$

Vergleichsspannungen für Stabtragwerke:

(nur eine Normalspannung und eine Schubspannung)

$$\sigma_{V1} = \frac{1}{2} \left[\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \right]$$

$$\sigma_{V2} = \frac{1}{2} \left[(1 - \nu)\sigma + (1 + \nu)\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \right]$$

$$\sigma_{V3} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$$

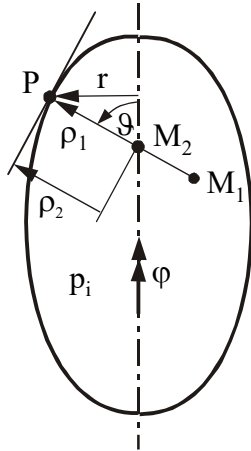
$$\sigma_{V4} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}$$

Vergleichsspannung nach der Gestaltänderungshypothese für den ebenen Spannungszustand:

$$\sigma_{V4} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\tau_{xy}^2}$$

Rotationssymmetrische Spannungszustände

Dünnwandige Behälter unter Innendruck p_i (Rotationsschale, Membranspannungen)



Für beliebigen Punkt P:

- ρ_1 - Krümmungsradius der Meridiankurve
- $r = \rho_2 \sin \vartheta$ - Breitenkreisradius
- h - Wanddicke
- φ - Meridianwinkel

Radialspannung vernachlässigbar klein.

	Allgemein	Kreiszylinder ($\rho_1 \rightarrow \infty, \vartheta \equiv \pi/2, \rho_2 \equiv r$)
Meridianspannung (Längsspannung)	$\sigma_\vartheta = \frac{p_i \rho_2}{2h}$	$\sigma_\vartheta \equiv \sigma_z = \frac{p_i \pi r^2}{2\pi r h} = \frac{p_i r}{2h}$
Ringspannung (Umfangsspannung)	$\sigma_\varphi = \frac{p_i \rho_2}{h} \left(1 - \frac{\rho_2}{2\rho_1}\right)$	$\sigma_\varphi = \frac{p_i 2rL}{2hL} = \frac{p_i r}{h}$

Dickwandige Rohre und rotierende Kreisscheiben konstanter Dicke

- r - radiale Koordinate
- E - Elastizitätsmodul
- ρ - Dichte
- ν - Querkontraktionszahl
- $\omega = \text{konst.}$ - Winkelgeschwindigkeit

- Längs- bzw. Axialspannung: $\sigma_z = \text{konst.}$

- Radialspannung:
$$\sigma_r(r) = C_1 + \frac{C_2}{r^2} - \frac{3 + \nu}{8} \rho \omega^2 r^2$$

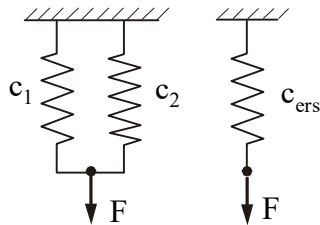
- Ringspannung:
$$\sigma_\varphi(r) = C_1 - \frac{C_2}{r^2} - \frac{1 + 3\nu}{8} \rho \omega^2 r^2$$

- Radialverschiebung:
$$u(r) = \frac{r}{E} \left[(1 - \nu) C_1 - (1 + \nu) \frac{C_2}{r^2} - \frac{1 - \nu^2}{8} \rho \omega^2 r^2 - \nu \sigma_z \right]$$

Federsteifigkeiten und Einflußzahlen

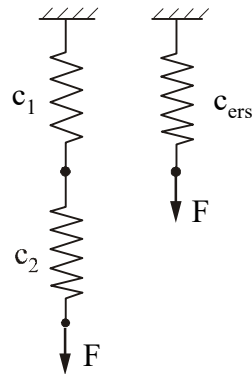
Ersatzfedersteifigkeiten c_{ers} für Federsysteme

Parallelanordnung von Feder



$$c_{\text{ers}} = c_1 + c_2$$

Reihenanzordnung von Federn



$$\frac{1}{c_{\text{ers}}} = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2}$$

Einflußzahlen

Durchbiegung:
$$v_i = \sum_{k=1}^n (\alpha_{ik} F_k + \gamma_{ik} M_k)$$

Biegewinkel:
$$\varphi_i = \sum_{k=1}^n (\delta_{ik} F_k + \beta_{ik} M_k)$$

Symmetriegesetz der Einflußzahlen (Maxwell-Betti):

$$\alpha_{ik} = \alpha_{ki} \quad \gamma_{ik} = \delta_{ki} \quad \beta_{ik} = \beta_{ki}$$

Formänderungsenergie und Satz von Castigliano

Formänderungsenergie

Feder unter Kraft- bzw. Momentenbelastung

$$W = \frac{F^2}{2c} \quad \text{bzw.} \quad W = \frac{M^2}{2c_d}$$

System aus Balken und Stäben

$$W = \frac{1}{2} \int_{(I)} \left\{ \frac{M_{bx}^2}{EI_{xx}} + \frac{M_{by}^2}{EI_{yy}} + \frac{M_t^2}{GI_t} + \frac{F_l^2}{EA} + \kappa_y \frac{F_{qy}^2}{GA} + \kappa_x \frac{F_{qx}^2}{GA} \right\} dz$$

(bereichsweise Integration über das gesamte System)

Formzahlen: $\kappa_y = \frac{A}{I_{xx}^2} \int_{(A)} \left(\frac{S_x(y)}{b(y)} \right)^2 dA$, κ_x - analog

für Rechteckquerschnitt: $\kappa_x = \kappa_y = \frac{6}{5}$
für Kreisquerschnitt: $\kappa_x = \kappa_y = \frac{10}{9}$

Satz von Castigliano

$$v_i = \frac{\partial W}{\partial F_i}, \quad \varphi_i = \frac{\partial W}{\partial M_i}$$

v_i - Verschiebung des Kraftangriffspunktes einer äußeren Kraft F_i in Krafrichtung

φ_i - Verdrehwinkel am Angriffspunkt eines äußeren Momentes M_i in Momentenrichtung

W - Formänderungsarbeit des gesamten Systems

Voraussetzungen:

Hookesches Gesetz, konstante Temperatur, kleine Verformungen

Beispiel für die allgemeine Ausführung der partiellen Ableitung:

$$W = \frac{1}{2} \int_{(I)} \frac{M_b^2}{EI} dz, \quad v_i = \frac{\partial W}{\partial F_i} = \int_{(I)} \frac{M_b}{EI} \frac{\partial M_b}{\partial F_i} dz.$$

In ebenen symmetrischen Tragwerken gilt im Symmetrieschnitt:

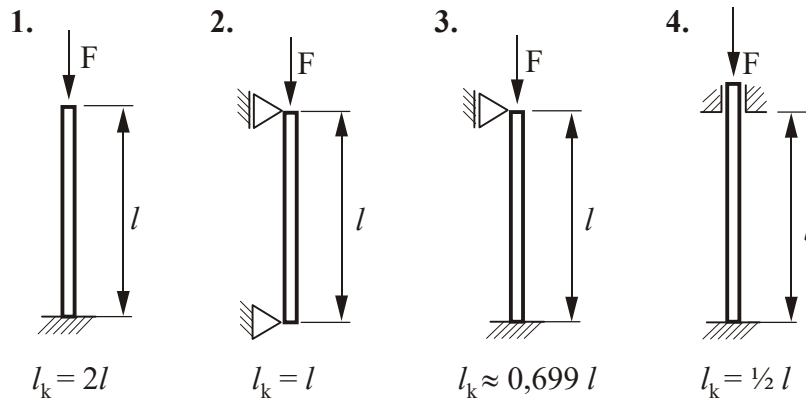
- bei symmetrischer Belastung: $F_q = 0$
- bei antimetrischer Belastung: $F_l = 0, M_b = 0$
- für beide Fälle gilt: es verschwinden dort die Verformungen in Richtung der nichtverschwindenden Schnittgrößen

Knickung gerader Stäbe

Elastische Knickung; die Eulerfälle

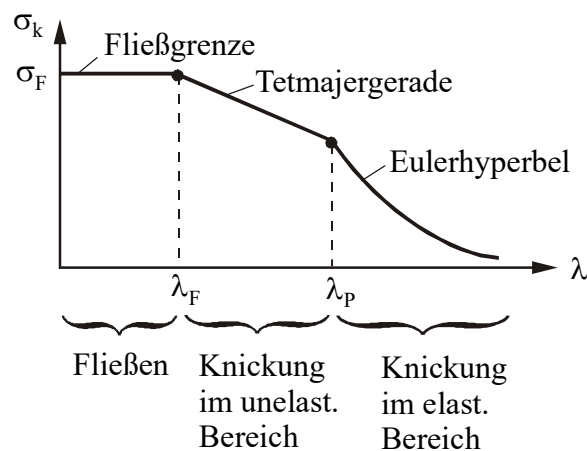
Knicklast (kritische Last): $F_k = \frac{\pi^2 EI}{l_k^2}$ (Eulerformel)

Bedingung: $\lambda \geq \lambda_p$ (siehe unelastisches Knicken)



Unelastische Knickung

Kritische Spannung σ_k :



Schlankheitsgrad: $\lambda = \frac{l_k}{i}$, Trägheitsradius: $i = \sqrt{\frac{I}{A}}$

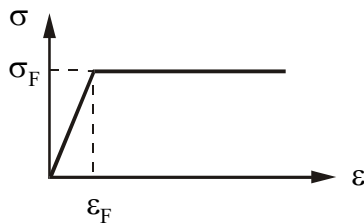
Euler (für $\lambda \geq \lambda_p$): $\sigma_k = \frac{F_k}{A} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$

Tetmajer (für $\lambda_F \leq \lambda \leq \lambda_p$): $\sigma_k = a - b \lambda$

Grenzschlankheitsgrad: $\lambda_p = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_p}}$

Elastisch-plastisches Materialverhalten

Elastisch-idealplastisches Materialverhalten



$$\sigma = E\varepsilon \quad \text{für } \varepsilon \leq \varepsilon_F$$

$$\sigma = \sigma_F \quad \text{für } \varepsilon > \varepsilon_F$$

Tragwerke aus Stäben

Elastische Grenzlaster: Für mindestens einen Stab des Tragwerks wird $\sigma = \sigma_F$ erreicht.

Traglast: Für mindestens einen Stab des statisch bestimmten (Rest-) Tragwerks wird $\sigma = \sigma_F$ erreicht.

→ Übergang zu einer beweglichen Struktur (Mechanismus)

Balken mit Biegebeanspruchung

Elastisches Grenzmoment $M_{b_{el}}$:

An einer Stelle des Balkens wird eine Randspannung vom Betrag $\sigma = \sigma_F$ erreicht.

Vollplastisches Moment $M_{b_{pl}}$:

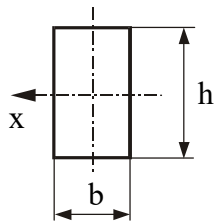
An einer Stelle des Balkens erreicht die Spannung im gesamten Querschnitt den Betrag $\sigma = \sigma_F$

→ Bildung eines plastischen Gelenks

Traglast:

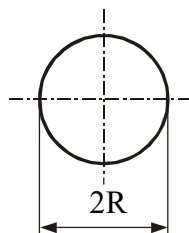
Die Traglast wird erreicht, wenn in einem statisch bestimmten (Rest-) Tragwerk ein plastisches Gelenk entsteht.

Beispiele:



$$M_{b_{el,x}} = \frac{1}{6} \sigma_F b h^2$$

$$M_{b_{pl,x}} = \frac{1}{4} \sigma_F b h^2$$



$$M_{b_{el}} = \frac{\pi}{4} \sigma_F R^3$$

$$M_{b_{pl}} = \frac{4}{3} \sigma_F R^3$$

Kinematik und Kinetik

Kinematik des Punktes

Grundlegende Begriffe

Bahn eines beliebigen Punktes Q

Ortsvektor	$\vec{r}(t)$
Geschwindigkeitsvektor	$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \equiv \dot{\vec{r}}$
Beschleunigungsvektor	$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \equiv \ddot{\vec{r}}$

Kartesische Koordinaten x, y, z

Einheitsvektoren $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{e}_x + y(t)\vec{e}_y + z(t)\vec{e}_z$$

$$\vec{v}(t) = v_x(t)\vec{e}_x + v_y(t)\vec{e}_y + v_z(t)\vec{e}_z$$

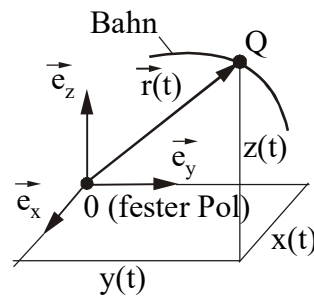
$$v_x = \dot{x}, \quad v_y = \dot{y}, \quad v_z = \dot{z}$$

$$v = |\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

$$\vec{a}(t) = a_x(t)\vec{e}_x + a_y(t)\vec{e}_y + a_z(t)\vec{e}_z$$

$$a_x = \dot{v}_x = \ddot{x}, \quad a_y = \dot{v}_y = \ddot{y}, \quad a_z = \dot{v}_z = \ddot{z}$$

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$



Bahnkoordinaten (natürliche Koordinaten)

Bewegungsgesetz auf der vorgegebenen, i.a. räumlichen Bahn: $s = s(t)$

Hauptkrümmungsmittelpunkt $M = M(s)$,

Hauptkrümmungsradius $\rho = \rho(s)$,

Normaleneinheitsvektor \vec{e}_n , Tangenteneinheitsvektor \vec{e}_t

$M, \rho, \vec{e}_n, \vec{e}_t$ liegen in der Schmiegeebene, die Bahnkurve i.a. nicht.

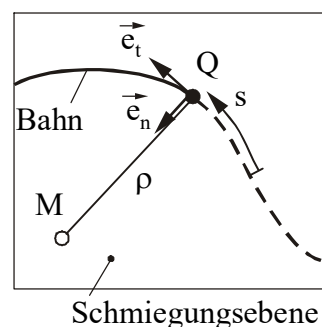
$$\vec{v}(t) = v_t(t)\vec{e}_t$$

$$v_t = \dot{s}, \quad v = |\vec{v}| = v_t$$

$$\vec{a}(t) = a_n(t)\vec{e}_n + a_t(t)\vec{e}_t$$

$$a_n = \frac{v^2}{\rho}, \quad a_t = \dot{v}_t = \ddot{s}$$

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{a_n^2 + a_t^2}$$



Zylinderkoordinaten r, φ, z

Einheitsvektoren $\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z$

$$\vec{R}(t) = r(t) \vec{e}_r + z(t) \vec{e}_z$$

$$|\vec{R}| = \sqrt{r^2 + z^2}$$

$$\vec{v}(t) = v_r(t) \vec{e}_r + v_\varphi(t) \vec{e}_\varphi + v_z(t) \vec{e}_z$$

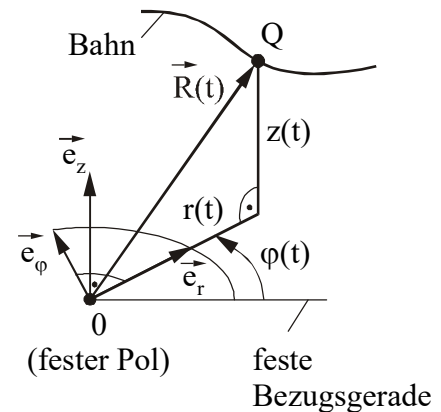
$$v_r = \dot{r}, \quad v_\varphi = r\dot{\varphi}, \quad v_z = \dot{z}$$

$$v = |\vec{v}| = \sqrt{v_r^2 + v_\varphi^2 + v_z^2}$$

$$\vec{a}(t) = a_r(t) \vec{e}_r + a_\varphi(t) \vec{e}_\varphi + a_z(t) \vec{e}_z$$

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2, \quad a_\varphi = r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}, \quad a_z = \ddot{z}$$

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{a_r^2 + a_\varphi^2 + a_z^2}$$



Sonderfall: ebene Polarkoordinaten r, φ

$$\vec{R} \equiv \vec{r}$$

$$|\vec{R}| \equiv |\vec{r}| \equiv r, \quad z \equiv 0, \quad v_z \equiv 0, \quad a_z \equiv 0$$

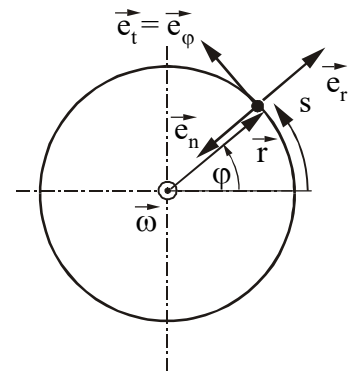
Bewegung auf einer Kreisbahn mit dem Radius r

= Sonderfall für Bahnkoordinaten ($\rho=r=\text{konst.}$) bzw. ebene Polarkoordinaten ($|\vec{r}| = r = \text{konst.}$)

Bewegungskordinate: φ oder $s = r\varphi$

Winkelgeschwindigkeit: $\omega = \dot{\varphi}$

Winkelbeschleunigung: $\alpha = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}$



$$\vec{r}(t) = -r\vec{e}_n$$

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$\vec{v} = v(t) \vec{e}_t$$

Geschwindigkeitsbetrag:

$$\vec{a} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}$$

$$\vec{a} = a_n(t) \vec{e}_n + a_t(t) \vec{e}_t$$

Zentripetalbeschleunigung:

Tangentialbeschleunigung:

$$\text{bzw. } \vec{r}(t) = r\vec{e}_r$$

$$\text{bzw. } \vec{v} = v_\varphi(t) \vec{e}_\varphi$$

$$v \equiv v_\varphi = \dot{s} = r\dot{\varphi} = r\omega$$

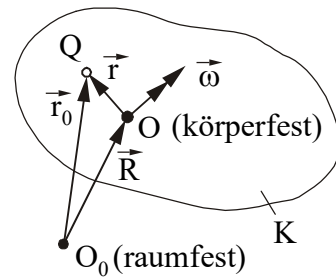
$$\text{bzw. } \vec{a} = a_r(t) \vec{e}_r + a_\varphi(t) \vec{e}_\varphi$$

$$a_n = -a_r = \frac{v^2}{r} = r\dot{\varphi}^2 = r\omega^2$$

$$a_t = a_\varphi = \dot{v} = \dot{s} = r\ddot{\varphi} = r\dot{\omega} = r\alpha$$

Relativbewegung

Punkt Q bewege sich relativ zu einem translatorisch ($\vec{R}(t)$) und rotatorisch ($\vec{\omega}(t)$) bewegten starren Körper (Bezugssystem) K.



Relativbewegung $\vec{r} = \vec{r}(t)$

Führungsbewegung $\vec{R} = \vec{R}(t), \quad \vec{\omega} = \vec{\omega}(t)$

Ortsvektor $\vec{r}_0 = \vec{R} + \vec{r}$

Absolute zeitliche Ableitung von $\vec{r}(t)$ bei körperfesten Einheitsvektoren $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ wie folgt darstellbar:

$$\dot{\vec{r}}(t) = \frac{d'\vec{r}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{r}, \quad \frac{d'\vec{r}}{dt} = \dot{r}_x \vec{e}_x + \dot{r}_y \vec{e}_y + \dot{r}_z \vec{e}_z$$

Absolutgeschwindigkeit $\vec{v} = \vec{v}_{\text{rel}} + \vec{v}_f$

Relativgeschwindigkeit $\vec{v}_{\text{rel}} = \frac{d'\vec{r}}{dt}$

Führungsgeschwindigkeit $\vec{v}_f = \dot{\vec{R}} + \vec{\omega} \times \vec{r}$

Absolutbeschleunigung $\vec{a} = \vec{a}_{\text{rel}} + \vec{a}_f + \vec{a}_C$

Relativbeschleunigung $\vec{a}_{\text{rel}} = \frac{d'\vec{v}_{\text{rel}}}{dt} = \frac{d'^2\vec{r}}{dt^2}$

Führungsbeschleunigung $\vec{a}_f = \ddot{\vec{R}} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}$

Zentripetalbeschleunigung $\vec{a}_Z = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$

Coriolisbeschleunigung $\vec{a}_C = 2\vec{\omega} \times \vec{v}_{\text{rel}} = 2\vec{\omega} \times \frac{d'\vec{r}}{dt}$

Geschwindigkeits- und Beschleunigungsverteilung im starren Körper

$$\frac{d'\vec{r}}{dt} = \vec{0}$$

$$\vec{v} = \dot{\vec{R}} + \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (\text{Eulerformel})$$

$$\vec{a} = \ddot{\vec{R}} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

Ebene Bewegung eines starren Körpers

Alle Körperpunkte bewegen sich auf zu einer raumfesten Bezugsebene parallelen Ebenen.

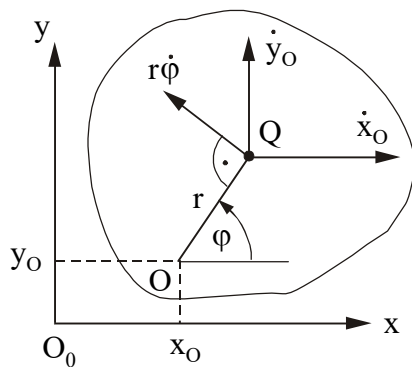
O_0 raumfester Bezugspunkt

O körperfester Bezugspunkt

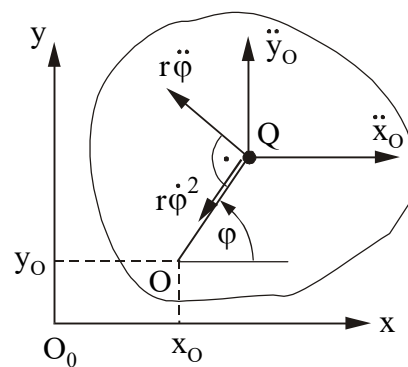
Jede ebene Bewegung eines starren Körpers kann zerlegt werden in

- eine ebene Translation entsprechend der ebenen Bewegung des körperfesten Bezugspunktes O und
- eine Rotation um die Achse senkrecht zur Bezugsebene durch O .

Geschwindigkeitskomponenten

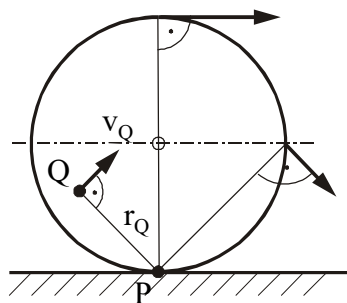


Beschleunigungskomponenten



Es gibt immer einen körperfesten Punkt P , den Momentanpol, dessen momentane Absolutgeschwindigkeit verschwindet. Im Momentanpol schneiden sich die Normalen der Geschwindigkeitsvektoren aller Punkte der Ebene. Die Bewegung kann momentan als Rotation um eine Achse senkrecht zur Bewegungsebene durch P betrachtet werden.

Beispiel: gleitfrei abrollendes Rad



$$v_Q = r_Q \omega$$

Grundaufgaben der Kinematik

Im folgenden stehen s, v, a z.B. für: x, v_x, a_x
 s, v, a_t
 φ, ω, α

Es gilt: $v = \frac{ds}{dt}, \quad a = \frac{dv}{dt} = v \frac{dv}{ds}$

Anfangsbedingungen: $s(t = t_0) = s_0, \quad v(t = t_0) = v_0$

Gegeben	Anleitung zur Ermittlung der übrigen Funktionen	
$s = s(t)$	$v(t) = \frac{ds}{dt}$	$a(t) = \frac{dv}{dt}$
$v = v(t)$	$s(t) = s_0 + \int_{t_0}^t v(\bar{t}) d\bar{t}$	$a(t) = \frac{dv}{dt}$
$a = a(t)$	$v(t) = v_0 + \int_{t_0}^t a(\bar{t}) d\bar{t}$	$s(t) = s_0 + \int_{t_0}^t v(\bar{t}) d\bar{t}$
$v = v(s)$	$t(s) = t_0 + \int_{s_0}^s \frac{d\bar{s}}{v(\bar{s})}$	$a(s) = v(s) \frac{dv(s)}{ds}$
$a = a(s)$	$v^2(s) = v_0^2 + 2 \int_{s_0}^s a(\bar{s}) d\bar{s}$	$t(s) = t_0 + \int_{s_0}^s \frac{d\bar{s}}{v(\bar{s})}$
$a = a(v)$	$t(v) = t_0 + \int_{v_0}^v \frac{d\bar{v}}{a(\bar{v})}$	$s(v) = s_0 + \int_{v_0}^v \frac{\bar{v}}{a(\bar{v})} d\bar{v}$

Massenträgheitsmomente eines starren Körpers

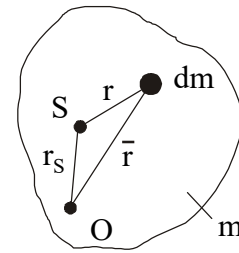
(Axiale) Massenträgheitsmoment bei vorgegebener Bezugsachse

Bezugsachsen senkrecht zur Zeichenebene

$$\text{durch Massenmittelpunkt S: } J_S = \int_{(m)} r^2 dm$$

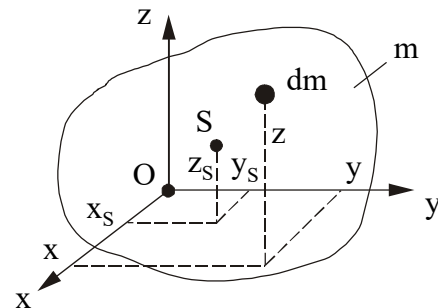
$$\text{durch beliebigen Punkt O: } J_O = \int_{(m)} \bar{r}^2 dm$$

$$\text{Satz von Steiner: } J_O = J_S + m r_S^2$$



Trägheitsmatrix für ein kartesisches Koordinatensystem

$$\mathbf{J}_O = \begin{bmatrix} J_{Oxx} & J_{Oxy} & J_{Oxz} \\ J_{Oyx} & J_{Oyy} & J_{Oyz} \\ J_{Ozx} & J_{Ozy} & J_{Ozz} \end{bmatrix}$$



(Axiale) Massenträgheitsmomente

$$J_{Oxx} = \int_{(m)} (y^2 + z^2) dm$$

$$J_{Oyy} = \int_{(m)} (z^2 + x^2) dm$$

$$J_{Ozz} = \int_{(m)} (x^2 + y^2) dm$$

Deviationsmomente (Zentrifugalmomente)

$$J_{Oxy} = J_{Oyx} = - \int_{(m)} xy dm$$

$$J_{Oyz} = J_{Ozy} = - \int_{(m)} yz dm$$

$$J_{Ozx} = J_{Oxz} = - \int_{(m)} zx dm$$

Satz von Steiner

$$J_{Oxx} = J_{Sxx} + (y_S^2 + z_S^2) m, \quad J_{Oxy} = J_{Sxy} - x_S y_S m$$

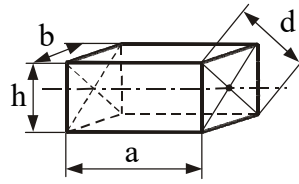
$$J_{Oyy} = J_{Syy} + (z_S^2 + x_S^2) m, \quad J_{Oyz} = J_{Syz} - y_S z_S m$$

$$J_{Ozz} = J_{Szz} + (x_S^2 + y_S^2) m, \quad J_{Ozx} = J_{Szx} - z_S x_S m$$

Massenträgheitsmomente ausgewählter homogener Körper bezüglich Schwerpunktsachsen (- - - - -)

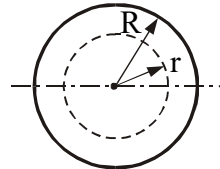
Quader

$$J = \frac{1}{12} m d^2 = \frac{1}{12} m (b^2 + h^2)$$



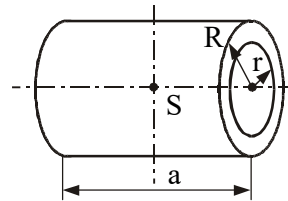
Hohlkugel

$$J = \frac{2}{5} m \frac{R^5 - r^5}{R^3 - r^3}$$



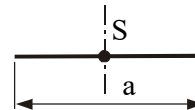
Kreisringzylinder, Längsachse

$$J = \frac{1}{2} m (R^2 + r^2)$$



Kreisringzylinder, Querachse

$$J = \frac{1}{4} m \left(R^2 + r^2 + \frac{1}{3} a^2 \right)$$



Dünner Stab (Querschnittsabmessungen $\ll a$)

$$J = \frac{1}{12} m a^2$$

Hauptträgheitsmomente und Hauptträgheitsachsen

Axiales Massenträgheitsmoment für eine Achse in Richtung eines beliebigen Einheitsvektors \vec{e}_i mit dem Spaltenvektor seiner Komponenten $\mathbf{e}_i = [e_{ix} \ e_{iy} \ e_{iz}]^T$:

$$J_i = \mathbf{e}_i^T \mathbf{J} \mathbf{e}_i$$

Eigenwertgleichung zur Bestimmung der Hauptträgheitsmomente J_i ($i=1, 2, 3$):

$$\det(\mathbf{J} - J_i \mathbf{E}) = 0, \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Gleichungen zur Bestimmung der Einheitsvektoren \vec{e}_i auf den Hauptträgheitsachsen:

$$(\mathbf{J} - J_i \mathbf{E}) \mathbf{e}_i = \mathbf{0} \equiv [0 \ 0 \ 0]^T, \quad e_{ix}^2 + e_{iy}^2 + e_{iz}^2 = 1$$

Newton'sches (dynamisches) Grundgesetz

Für einen freien (d.h. keinen Zwangsbedingungen unterworfenen) Massenpunkt der Masse m gilt zwischen der Beschleunigung \vec{a} und der resultierenden Kraft \vec{F} die Beziehung

$$m \vec{a} = \vec{F}.$$

d'Alembertsches Prinzip

Zurückführen eines kinetischen Problems auf ein statisches Problem mittels Ergänzen der eingprägten Kräfte und Momente durch die Massenbeschleunigungskräfte und -momente in negativer Beschleunigungs- und Winkelbeschleunigungsrichtung.

Beispiele

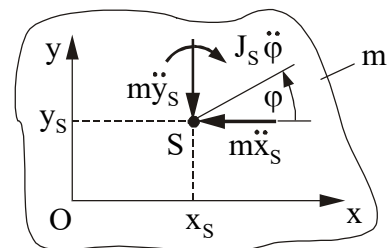
Ebene Bewegung eines starren Körpers

Massenbeschleunigungskräfte:

$$m \ddot{x}_S, m \ddot{y}_S$$

Massenbeschleunigungsmoment:

$$J_S \ddot{\phi}$$



Bewegung eines Massenpunktes auf einer Kreisbahn

Beschleunigungen:

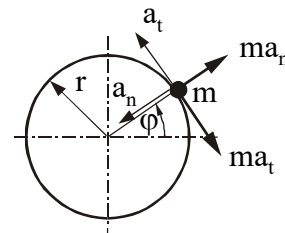
Normal-(Zentripetal)Beschleunigung a_n

Tangentialbeschleunigung a_t

Massenbeschleunigungskräfte:

$$m a_n = m r \dot{\phi}^2 = m \frac{v^2}{r} \quad (\text{Zentrifugalkraft})$$

$$m a_t = m r \ddot{\phi}$$



Arbeit, Leistung, Energie

Arbeit und Leistung

	Kraft \vec{F}	Moment \vec{M}
Arbeit	$W = \int_{(1)}^{(2)} \vec{F} d\vec{r}$	$W = \int_{(1)}^{(2)} \vec{M} d\vec{\varphi}$
Leistung	$P = \vec{F} \vec{v}$	$P = \vec{M} \vec{\omega}$

Potential (potentielle Energie)

Konservative Kräfte (Potentialkräfte) $\vec{F} = \vec{F}(x, y, z)$ lassen sich aus einem Potential $U = U(x, y, z)$ ableiten:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U = -\left(\vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}\right)U \quad \text{bzw.}$$

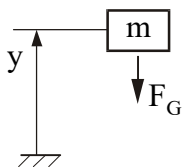
$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}$$

Für sie ist die Arbeit vom Integrationsweg unabhängig:

$$W = -\int_{(1)}^{(2)} dU = U_1 - U_2$$

Beispiele:

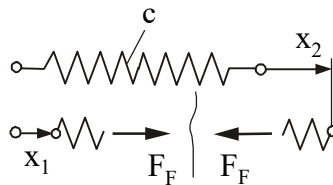
Potential der Gewichtskraft F_G
(homogenes Schwerfeld, g)



$$F_G = m g$$

$$U = m g y + C, \quad C = \text{konst.}$$

Potential der Federkraft F_F
(Federsteifigkeit c)



$$F_F = c(x_2 - x_1)$$

$$U = \frac{1}{2} c(x_2 - x_1)^2 = \frac{1}{2} c(x_1 - x_2)^2$$

Kinetische Energie eines Massenpunktes

$$T = \frac{1}{2} m \vec{v}^2 = \frac{1}{2} m v^2, \quad v = |\vec{v}|$$

Kinetische Energie eines starren Körpers

Allgemein:

$$T = T_{\text{tr}} + T_{\text{rot}}$$

Translationsenergie: $T_{\text{tr}} = \frac{1}{2} m \vec{v}_S^2 = \frac{1}{2} m v_S^2$

\vec{v}_S : Geschwindigkeit des Massenmittelpunktes

Rotationsenergie: $T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{J}_S \boldsymbol{\omega}, \quad \boldsymbol{\omega}^T = [\omega_x \quad \omega_y \quad \omega_z]$

Für Hauptachsen x,y,z: $T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} (J_{Sxx} \omega_x^2 + J_{Syy} \omega_y^2 + J_{Szz} \omega_z^2)$

Starrer Körper mit Festlager O:

Es gilt auch: $T = T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{J}_O \boldsymbol{\omega}$

Für Hauptachsen x,y,z: $T = T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} (J_{Oxx} \omega_x^2 + J_{Oyy} \omega_y^2 + J_{Ozz} \omega_z^2)$

Starrer Körper bei ebener Bewegung

(z.B. Rotation um raumfeste Achse):

$$T = \frac{1}{2} m v_S^2 + \frac{1}{2} J_S \omega^2$$

Bei starrem Körper mit Festlager O gilt auch: $T = \frac{1}{2} J_O \omega^2$

(Bezugsachsen von J_S bzw. J_O senkrecht zur Bewegungsebene, nicht notwendig Hauptachsen)

Arbeitssatz

$$W^{(e)} = \Delta T = T_2 - T_1$$

(in dieser Form gültig für Systeme ohne zeitabhängige starre Bindungen)

$W^{(e)}$ – Gesamtarbeit aller eingprägten Kräfte und Momente

Energiesatz

$$T_1 + U_1 + W^* = T_2 + U_2$$

W^* - Gesamtarbeit aller eingprägten nichtkonservativen Kräfte und Momente (Antrieb, Reibung, Dämpfung, ...)

Energieerhaltungssatz

Für konservative Systeme gilt: $T_1 + U_1 = T_2 + U_2$

$$T + U = \text{konst.}, \quad \frac{d}{dt}(T + U) = 0$$

Lagrangesche Bewegungsgleichungen 2. Art

Vorschrift zur Herleitung der Bewegungsgleichungen für ein holonomes (nur integrable Zwangsbedingungen) mechanisches System mit f Freiheitsgraden:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = Q_k^*, \quad k = 1, \dots, f$$

mit $L = L(q_1, \dots, q_f, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f, t) = T - U$

L - Lagrangesche Funktion

q_k - den Zwangsbedingungen genügende verallgemeinerte Koordinaten

Q_k^* - verallgemeinerte eingeprägte, nichtkonservative Kräfte

Ermittlung der Q_k^* aus der virtuellen Arbeit aller eingepprägten nichtkonservativen Kräfte $F_i^{(e)*}$ und Momente $M_j^{(e)*}$ mittels Koeffizientenvergleich bei den δq_k :

$$\delta W^{(e)} = \sum_{(i)} F_i^{(e)*} \delta x_i + \sum_{(j)} M_j^{(e)*} \delta \varphi_j = \sum_{k=1}^f Q_k^* \delta q_k$$

δ - virtuelle differentielle Änderung (mit $\delta t = 0$ bei $dt \neq 0$)

Impuls und Drehimpuls (Drall)

Impuls eines Massenpunktes der Masse m :

$$\vec{p} = m \vec{v}$$

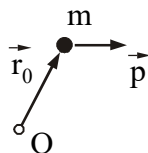
Impuls eines beliebigen mechanischen Systems:

$$\vec{p} = m \vec{v}_S \quad 1. \text{ Schwerpunktsatz}$$

\vec{v}_S - Geschwindigkeit des Massenmittelpunktes

Drehimpuls eines Massenpunktes bezüglich eines raumfesten Punktes O :

$$\vec{L}_O = \vec{r}_0 \times \vec{p}$$



Für ein beliebiges System ist über die entsprechenden Drehimpulse aller Massenelemente zu integrieren.

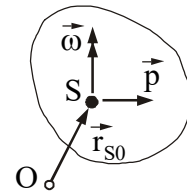
Drehimpuls eines starren Körpers bezüglich eines raumfesten Punktes O:

Allgemein:

$$\vec{L}_O = \vec{r}_{S0} \times \vec{p} + \vec{L}_S$$

Drehimpuls bezüglich des Massenmittelpunktes S:

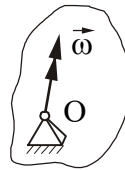
$$\vec{L}_S = [L_{Sx} \quad L_{Sy} \quad L_{Sz}]^T = \mathbf{J}_S \boldsymbol{\omega}, \quad \boldsymbol{\omega} = [\omega_x \quad \omega_y \quad \omega_z]^T$$



Für Hauptachsen x,y,z: $L_{Sx} = J_{Sxx} \omega_x$, $L_{Sy} = J_{Syy} \omega_y$, $L_{Sz} = J_{Szz} \omega_z$

Starrer Körper mit Festlager O:

$$\vec{L}_O = \mathbf{J}_O \boldsymbol{\omega}$$



Starrer Körper bei ebener Bewegung

(z.B. Rotation um raumfeste Achse):

Voraussetzung: Bezugsachsen senkrecht zur Bewegungsebene sind Hauptachsen!

$$\vec{L}_S = \mathbf{J}_S \boldsymbol{\omega}$$

Für starren Körper mit Festlager auch:

$$\vec{L}_O = \mathbf{J}_O \boldsymbol{\omega}$$

Impulssatz und Drehimpulssatz (Drallsatz)

Impulssatz für einen Massenpunkt

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \quad \text{bzw.} \quad m\vec{a} = \vec{F}$$

(für freien Massenpunkt: Newtonsches Grundgesetz)

Impulssatz für ein beliebiges System

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_a \quad \text{bzw.} \quad m\vec{a}_S = \vec{F}_a \quad \text{2. Schwerpunktsatz}$$

\vec{F}_a - Resultierende aller äußeren Kräfte

Drehimpulssatz für ein beliebiges System

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_a$$

\vec{M}_a - Resultierendes Moment aller äußeren Kräfte

Drehimpulssatz für einen starren Körper

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d'\vec{L}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{L} = \vec{M}_a, \quad \mathbf{L} = \mathbf{J} \boldsymbol{\omega}, \quad \frac{d'\vec{L}}{dt} = \dot{L}_x \vec{e}_x + \dot{L}_y \vec{e}_y + \dot{L}_z \vec{e}_z$$

Bezugspunkt für \vec{L} und \vec{M}_a einheitlich ein raumfester Punkt O oder der Massenmittelpunkt S.
Sind x,y,z Hauptachsen, so ergeben sich die

Eulerschen Gleichungen

$$\begin{aligned} J_{xx} \dot{\omega}_x - (J_{yy} - J_{zz}) \omega_y \omega_z &= M_{ax} \\ J_{yy} \dot{\omega}_y - (J_{zz} - J_{xx}) \omega_z \omega_x &= M_{ay} \\ J_{zz} \dot{\omega}_z - (J_{xx} - J_{yy}) \omega_x \omega_y &= M_{az} \end{aligned}$$

Starrer Körper bei ebener Bewegung

(z.B. Rotation um raumfeste Achse)

$$J \dot{\omega} = M_a$$

Bezugsachse für J und M_a einheitlich senkrecht zur Bewegungsebene durch raumfesten Punkt O oder Massenmittelpunkt S, nicht notwendig Hauptachse.

Stoß

Gerader zentrischer Stoß



Impulserhaltungssatz

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 c_1 + m_2 c_2$$

Stoßzahl

$$k = \frac{c_2 - c_1}{v_1 - v_2}$$

Allgemeine Lösung:

$$c_1 = v_1 - \frac{m_2}{m_1 + m_2} (1+k)(v_1 - v_2) = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2 - k m_2 (v_1 - v_2)}{m_1 + m_2}$$

$$c_2 = v_2 + \frac{m_1}{m_1 + m_2} (1+k)(v_1 - v_2) = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2 + k m_1 (v_1 - v_2)}{m_1 + m_2}$$

Änderung der kinetischen Energie

$$\Delta T = -\frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (1 - k^2) (v_1 - v_2)^2$$

$|\Delta T|$ = Verlust an kinetischer Energie

Grenzfälle

(völlig) unelastischer Stoß =
plastischer Stoß

$$k = 0$$

$$\Delta T = \Delta T_{\max} = -\frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2)^2$$

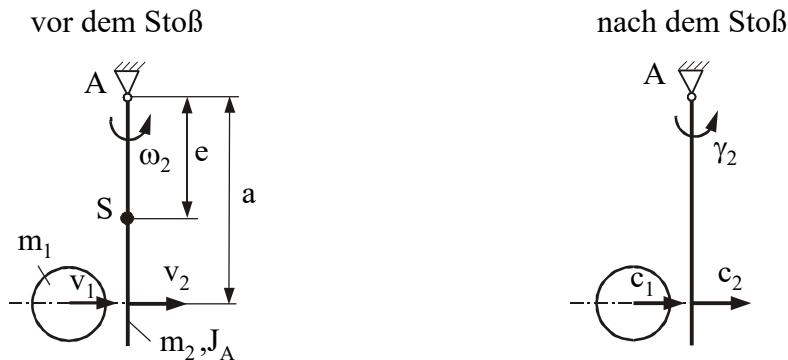
(völlig) elastischer Stoß

$$k = 1$$

$$\Delta T = 0$$

Gerader exzentrischer Stoß

Beispiel: Stoß zwischen Kugel und frei drehbar aufgehängtem Stab



Drehimpulserhaltungssatz
bezüglich A

$$m_1 c_1 a + J_A \gamma_2 = m_1 v_1 a + J_A \omega_2$$

Zwangsbedingung: $v_2 = a \omega_2$, $c_2 = a \gamma_2$

Stoßzahl

$$k = \frac{c_2 - c_1}{v_1 - v_2}$$

Es gilt die allgemeine Lösung wie beim geraden zentrischen Stoß, wenn nur m_2 durch die reduzierte Masse des Stabes $m_{2\text{red}} = \frac{J_A}{a^2}$ ersetzt wird,

oder

$$c_1 = \frac{m_1 a^2 v_1 + J_A a \omega_2 - k J_A (v_1 - a \omega_2)}{m_1 a^2 + J_A}$$

$$\gamma_2 = \frac{m_1 a v_1 + J_A \omega_2 + k m_1 a (v_1 - a \omega_2)}{m_1 a^2 + J_A}$$

Stoßmittelpunkt

Lager A = Stoßmittelpunkt, wenn a so festgelegt wird, daß bei A während des Stoßes kein Kraftimpuls übertragen wird:

$$a = \frac{J_A}{m_2 e}$$

Lineare Schwingungen mit einem Freiheitsgrad

Freie ungedämpfte Schwingungen

Allgemeine Bewegungsgleichung:

$$\ddot{q} + \omega^2 q = 0$$

$q=q(t)$: verallgemeinerte Bewegungskordinate
 ω^2 : von Systemparametern abhängiger Ausdruck

Allgemeine Lösung für $\omega^2 > 0$:

$$q(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t = A \sin(\omega t + \varphi)$$

mit

$$C_1 = A \sin \varphi, \quad C_2 = A \cos \varphi$$

$$A^2 = C_1^2 + C_2^2, \quad \varphi = \arctan \frac{C_1}{C_2} = \arcsin \frac{C_1}{A}$$

Bestimmung von C_1, C_2 bzw. A, φ aus Anfangsbedingungen

ω : Eigenkreisfrequenz

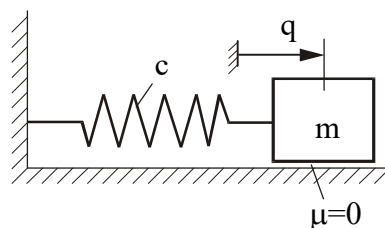
$f = \frac{\omega}{2\pi}$: Eigenfrequenz

$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f}$: Periodendauer (Schwingungsdauer)

$\omega t + \varphi$: Phase(nwinkel)

φ : Nullphase(nwinkel)

Beispiel: Reibungsfreier horizontaler Feder-Masse-Schwinger
($q=0$: Feder entspannt)



$$m\ddot{q} + cq = 0, \quad \omega = \sqrt{\frac{c}{m}}$$

Freie viskos gedämpfte Schwingungen

Allgemeine Bewegungsgleichung

$$\ddot{q} + 2\delta\dot{q} + \omega_0^2 q = 0$$

$\delta = D\omega_0$, ω_0^2 : von Systemparametern abhängige Ausdrücke

Allgemeine Lösung für $\delta < \omega_0$ ($D < 1$):

$$q(t) = e^{-\delta t} (C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t) = e^{-\delta t} A \sin(\omega t + \varphi)$$

mit

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \omega_0 \sqrt{1 - D^2}$$

Bestimmung von C_1 , C_2 bzw. A , φ aus Anfangsbedingungen

- ω_0 : Kennkreisfrequenz
 ω : Eigenkreisfrequenz
 δ : Abklingkonstante, $[\delta] = s^{-1}$
 $D = \frac{\delta}{\omega_0}$: Dämpfungsgrad (dimensionslos)

Logarithmisches Dekrement

$$\Lambda = \ln \frac{q(t_0)}{q(t_0 + T)} = \frac{1}{N} \ln \frac{q(t_0)}{q(t_0 + NT)}, \quad N = 1, 2, \dots \quad T = \frac{2\pi}{\omega}$$

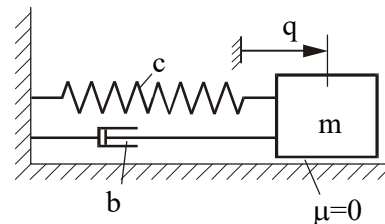
$$\Lambda = \delta T = 2\pi \frac{D}{\sqrt{1 - D^2}}, \quad D = \frac{\Lambda}{\sqrt{(2\pi)^2 + \Lambda^2}}$$

Beispiel: Reibungsfreier horizontaler Feder-Dämpfer-Masse-Schwinger
 ($q = 0$: Feder entspannt)

$$m\ddot{q} + b\dot{q} + cq = 0$$

b - Dämpfungskonstante
 $[b] = \text{Ns m}^{-1} = \text{kg s}^{-1}$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}}, \quad \delta = \frac{b}{2m}, \quad D = \frac{b}{2\sqrt{cm}}$$



Erzwungene viskos gedämpfte Schwingungen

Beispiel: Reibungsfreier horizontaler Feder-Dämpfer-Masse-Schwinger

Allgemeine Bewegungsgleichung:

$$m\ddot{q} + b\dot{q} + cq = F(\Omega, t), \quad \delta = \frac{b}{2m}, \quad \omega_0^2 = \frac{c}{m}$$

Vollständige allgemeine Lösung:

$$q(t) = e^{-\delta t} A \sin(\omega t + \varphi) + K \sin(\Omega t - \psi)$$

Eingeschwungene stationäre Lösung:

$$q(t) = K \sin(\Omega t - \psi)$$

$F(\Omega t)$: harmonisch veränderliche Erregerkraft

Ω : Erregerkreisfrequenz

K : Amplitude der Ω -frequenten stationären Lösung

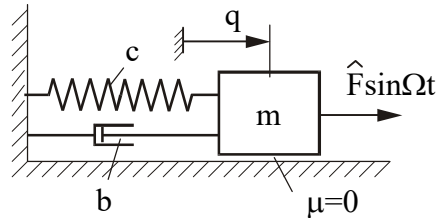
ψ : Nacheilwinkel

$\eta = \frac{\Omega}{\omega_0}$: Abstimmung(sverhältnis)

Kraft- oder Federkrafterregung

$$F(\Omega, t) = \hat{F} \sin \Omega t,$$

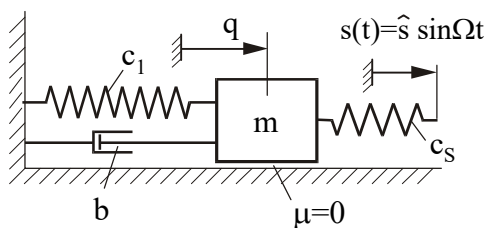
$$K = \frac{\hat{F}}{c} V_1$$



$$F(\Omega, t) = c_s \hat{s} \sin \Omega t,$$

$$K = \frac{c_s}{c} \hat{s} V_1,$$

$$c = c_1 + c_s$$



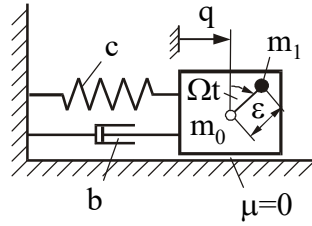
Vergrößerungsfunktion:
$$V_1 = \frac{1}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + 4D^2\eta^2}}$$

Nacheilwinkel:
$$\psi = \psi_1 = \arctan \frac{2D\eta}{1 - \eta^2}, \quad 0 \leq \psi_1 < \pi$$

Unwuchterregung

$$F(\Omega, t) = m_1 \varepsilon \Omega^2 \sin \Omega t,$$

$$K = \frac{m_1}{m} \varepsilon V_2, \quad m = m_0 + m_1$$



Vergößerungsfunktion:
$$V_2 = \frac{\eta^2}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + 4D^2\eta^2}}$$

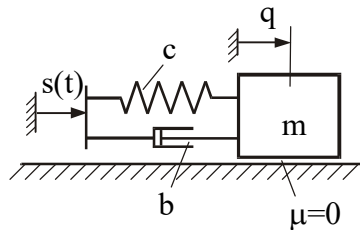
Nacheilwinkel:
$$\psi = \psi_2 = \arctan \frac{2D\eta}{1-\eta^2}, \quad 0 \leq \psi_2 < \pi$$

Stützerregung

$$F(\Omega, t) = cs + bs\dot{t},$$

$$s(t) = \hat{s} \sin \Omega t$$

$$K = \hat{s} V_3$$



Vergößerungsfunktion:
$$V_3 = \frac{\sqrt{1+4D^2\eta^2}}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + 4D^2\eta^2}}$$

Nacheilwinkel:
$$\psi = \psi_3 = \arctan \frac{2D\eta^3}{1-\eta^2(1-4D^2)}, \quad 0 \leq \psi_3 < \pi$$